

IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLARGA URINMA TENGLAMASINI TOPISH USULLARINING QIYOSIY TAHLILI

Bektemirova Xolida Davronbek qizi

Urganch davlat pedagogika instituti

E-mail: xolidabektemirova7@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu maqolada ikkinchi tartibli chiziqdagi urinma tenglamasini topishning ikki xil usuli — kesuvchi chiziqning limit holatiga asoslangan geometrik usul hamda hosilaning geometrik ma'nosiga asoslangan differensial usul o'rganilgan. Har ikkala usulning nazariy asoslari yoritilib, urinma tenglamasini keltirib chiqarish jarayoni batafsil tahlil qilingan. Olingan natijalar asosida usullarning o'xshash va farqli jihatlari, afzalliklari hamda qo'llanish imkoniyatlari taqqoslangan. Tadqiqot natijasida har ikkala usul bir xil urinma tenglamasiga olib kelishi, biroq hisoblash qulayligi va nazariy yondashuvi jihatidan farq qilishi ko'rsatildi.

Kalit so'zlar: ikkinchi tartibli chiziq, urinma, kesuvchi chiziq, limit, hosila, differensial hisob.

Kirish. Analitik geometriyaning muhim masalalaridan biri egri chiziqning geometrik xossalarini o'rganishdan iborat. Ushbu chiziqning muhim geometrik elementlaridan biri urinma bo'lib, u egri chiziqning berilgan nuqtadagi lokal xususiyatlarini tavsiflaydi hamda ko'plab geometrik va fizik masalalarni yechishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Urinma tushunchasi matematikaning turli bo'limlarida turlicha yondashuvlar asosida qaraladi. Analitik geometriyada urinma egri chiziqning berilgan nuqtasidan o'tuvchi kesuvchi chiziqning limit holati sifatida aniqlansa, matematik analizda urinmaning burchak koeffitsienti funksiya hosilasining geometrik ma'nosi orqali ifodalanadi. Mazkur yondashuvlarning har biri o'zining nazariy asoslariga ega bo'lib, urinma tenglamasini hosil qilishda muhim o'rin tutadi.

Maqolaning ilmiy ahamiyati shundaki, unda urinma tenglamasini hosil qilishning geometrik va analitik yondashuvlari o'zaro bog'liq holda tahlil qilinadi hamda ularning ekvivalentligi asoslab beriladi. Bu esa ikkinchi tartibli chiziq nazariyasini chuqurroq tushunishga xizmat qiladi.

Asosiy qism.

I-usul. Faraz qilaylik, ikkinchi tartibli egri chiziq berilgan bo'lsin:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

va uning biror $M(x_1, y_1)$ nuqtasiga urinma o'tkazish lozim bo'lsin. Buning uchun berilgan egri chiziqda haligi M nuqtaga qo'shni bo'lgan yana biror $M'(x_2, y_2)$ nuqtani olamiz. M va M' nuqtalardan o'tgan kesuvchi to'g'ri chiziqning tenglamasi

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

yoki

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad (2)$$

bo'ladi.

M va M' nuqtalar (1) egri chiziqda bo'lgani uchun

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2Dx_1 + 2Ey_1 + F = 0, \quad (3)$$

$$Ax_2^2 + 2Bx_2y_2 + Cy_2^2 + 2Dx_2 + 2Ey_2 + F = 0. \quad (4)$$

(4) dan (3) ayirilsa:

$$A(x_2^2 - x_1^2) + 2B(x_2y_2 - x_1y_1) + C(y_2^2 - y_1^2) + 2D(x_2 - x_1) + 2E(y_2 - y_1) = 0. \quad (5)$$

Ikkinchi tomondan

$$x_2y_2 - x_1y_1 = x_2y_2 - x_1y_1 + x_2y_1 - x_2y_1 = x_2(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1)$$

bo'lgani uchun (5) ni bunday yozish mumkin:

$$A(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + 2Bx_2(y_2 - y_1) + 2By_1(x_2 - x_1) + C(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) + 2D(x_2 - x_1) + 2E(y_2 - y_1) = 0,$$

yoki

$$(x_2 - x_1)[A(x_2 + x_1) + 2By_1 + 2D] + (y_2 - y_1)[C(y_2 + y_1) + 2Bx_2 + 2E] = 0;$$

bundan

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{A(x_2 + x_1) + 2By_1 + 2D}{C(y_2 + y_1) + 2Bx_2 + 2E}.$$

Buni (2) ga qo'ysak:

$$y - y_1 = -\frac{A(x_2 + x_1) + 2By_1 + 2D}{C(y_2 + y_1) + 2Bx_2 + 2E}(x - x_1). \quad (6)$$

Berilgan (1) egri chiziqdagi M va M' nuqtadan o'tgan kesuvchi chiziqning tenglamasi shundan iborat bo'lib, bu tenglama M va M' egri chiziqning qayerida bo'lsada o'z kuchini saqlaydi. Ma'lumki, M' kesuvchi chiziqdan egri chiziqning M nuqtasida urinma hosil qilish uchun M' nuqtani M nuqtaga cheksiz yaqinlashtirib kelish kerak. Bu holda, ya'ni

$$x_2 \rightarrow x_1, \quad y_2 \rightarrow y_1.$$

bo'lganda (6) ning ko'rinishi, limitga o'tilsa

$$y - y_1 = -\frac{Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + Cy_1 + E}(x - x_1). \quad (7)$$

bo'ladi. Buni quyidagicha soddalashtirish mumkin:

$$(Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + Cy_1 + E)y = Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1;$$

buning ikkala tomoniga

$$Dx_1 + Ey_1 + F$$

ni qo'shamiz. Bu holda (3) ga muvofiq:

$$(Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + Cy_1 + E)y + (Dx_1 + Ey_1 + F) = 0. \quad (8)$$

izlangan urinmaning tenglamasi shundan iborat. Chiqarilgan tenglamani simmetrik formada yozish mumkin. Buning uchun (1) tenglamaning chap tomonini uchinchi (z) koordinata yordamida bir jinsli funktsiyaga aylantiramiz:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$

bunda $z=1$ bo'lganda, avvalgi (1) tenglama hosil bo'ladi. Agar bu tenglamaning chap tomonini qisqacha $2F(x, y, z)$ bilan belgilab olsak, u holda:

$$F'_{x_1} = Ax_1 + By_1 + D,$$

$$F'_{y_1} = Bx_1 + Cy_1 + E,$$

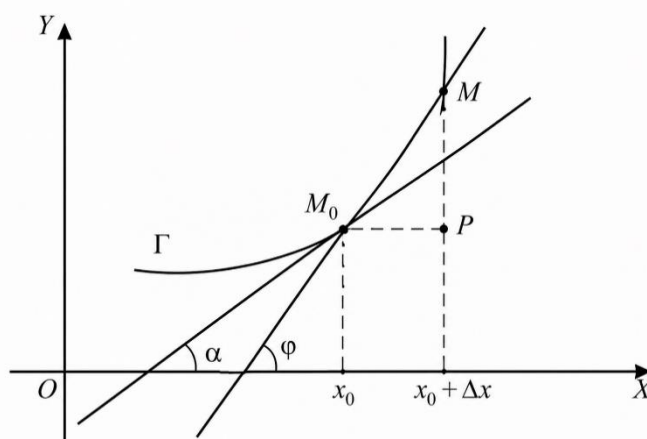
$$F'_{z_1} = Dx_1 + Ey_1 + F.$$

Bularga asosan (8) ning ko‘rinishi bunday bo‘ladi:

$$xF'_{x_1} + yF'_{y_1} + zF'_{z_1} = 0.$$

Yuqorida ikkinchi tartibli chiziqqa urinma tenglamasi kesuvchi chiziqning limit holatidan foydalanib keltirib chiqarildi. Mazkur usul urinmaning geometrik mohiyatini ochib berish bilan birga, uning egri chiziq bilan bog‘liqligini yaqqol ko‘rsatadi. Biroq urinma tenglamasini aniqlashda faqat geometrik yondashuv bilan cheklanib qolmasdan, matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lgan hosila yordamida ham ushbu natijani hosil qilish mumkin. Shu sababli quyida urinma tenglamasini hosilaning geometrik ma‘nosiga tayangan holda keltirib chiqarish ko‘rib chiqiladi.

2-usul. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo‘lib, $x_0 \in (a,b)$ nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsin.



1-chizma

Bu $f(x)$ funksiyaning grafigi 1-chizmada tasvirlangan Γ egri chiziqni ifodalasin. Bu Γ chiziqda $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ nuqtalarni olib, ular orqali o‘tuvchi l kesuvchini qaraymiz. $M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$, $M(x, f(x)) \in \Gamma$, $M \rightarrow M_0$ da l kesuvchi limit holati Γ chiziqqa M_0 nuqtada o‘tkazilgan urinma deyiladi. Ravshanki, φ burchak Δx ga bog‘liq: $\varphi = \varphi(\Delta x)$. $f(x)$ funksiyaning grafigiga M_0 nuqtada o‘tkazilgan urinmaning mavjud bo‘lishi uchun

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

ning mavjud bo‘lishi lozim. Bunda α - urinmaning OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil etgan burchagi. M_0MP uchburchakdan:

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo‘lib, undan

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Funksiya uzluksizligidan foydalanib topamiz:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{arctg} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right] = \operatorname{arctg} f'(x_0).$$

Demak, $\Delta x \rightarrow 0$ da $\varphi(\Delta x)$ ning limiti mavjud va $\alpha = \arctg f'(x_0)$.

Keyingi tenglikdan

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, funksiyaning x_0 nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi.

Biz bilamiz urinma har doim to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. U holda to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasidan foydalansak urinmaning tenglamasi

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Shunday qilib, urinma tenglamasi hosilaning geometrik ma'nosidan foydalanib ham hosil qilindi.

Natijada urinma tenglamasini topishning geometrik va analitik yondashuvlari qarab chiqildi.

Ikkinchi tartibli chiziqdagi urinma tenglamasini aniqlashning yuqorida ko'rib chiqilgan ikkala usuli bir xil natijaga olib kelishiga qaramasdan, ularning nazariy asosi va amaliy qo'llanishida ma'lum farqlar mavjud. Kesuvchi chiziqning limit holatiga asoslangan usul analitik geometriyaning klassik g'oyalariga tayansa, hosila usuli matematik analizning fundamental tushunchalaridan foydalanadi.

Kesuvchi chiziqning limit holatiga asoslangan usulda urinma egri chiziqning ikki nuqtasidan o'tuvchi kesuvchining limit holati sifatida qaraladi. Bu yondashuv urinmaning geometrik mohiyatini aniq yoritadi, biroq limit va algebraik almashtirishlar sababli hisoblashlar nisbatan murakkabroq bo'ladi.

Hosilaning geometrik ma'nosiga asoslangan usulda esa urinmaning burchak koeffitsienti funksiya hosilasiga tengligi asos qilib olinadi. Natijada urinma tenglamasi sodda va ixcham ko'rinishda hosil qilinadi hamda amaliy hisoblashlarda qulayligi bilan ajralib turadi.

Kening endi yuqoridagi mulohazalarga muvofiq na'muna sifatida misol yechish bilan shug'ullanamiz. Bunda ellips uchun urinmani ikki usulda ham topib, ularni amalda qiyosiy solishtiramiz:

Misol. Quyidagi ellipsga

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

uning $M\left(3, \frac{16}{5}\right)$ nuqtasidagi urinma tenglamasini toping.

Yechish: Avvalo, berilgan nuqtaning ellipsga tegishli ekanligini tekshiramiz. Buning uchun $x = 3$

va $y = \frac{16}{5}$ da tenglamani qanoatlantirishi lozim.

$$\frac{1}{25} \cdot 9 + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^2}{16} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$$

Demak,

$$M\left(3, \frac{16}{5}\right)$$

nuqta ellipsda yotadi. Endi asosiy masalani yechish qismi bilan shug'ullanamiz.

Dastlab, hosilaning geometrik ma'nosidan foydalanib urinma tenglamasini topamiz. Berilgan ellips tenglamasini x bo'yicha differensiallaymiz, bunda y funksiya ham x ga bog'liqligi inobatga olamiz. U holda quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$\frac{2x}{25} + \frac{2y}{16} \cdot y' = 0.$$

Bundan

$$y' = -\frac{16x}{25y}.$$

Endi berilgan nuqtadagi hosila qiymatini topamiz:

$$y' \left(3, \frac{16}{5} \right) = -\frac{16 \cdot 3}{25 \cdot \frac{16}{5}} = -\frac{3}{5}.$$

Demak, urinmaning burchak koeffitsienti

$$k = -\frac{3}{5}.$$

Urinma tenglamasi

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

formula yordamida topiladi. Berilgan qiymatlarni qo'ysak:

$$y - \frac{16}{5} = -\frac{3}{5}(x - 3).$$

Tenglamani soddalashtiramiz:

$$5y - 16 = -3x + 9$$

yoki

$$3x + 5y - 25 = 0.$$

Demak, urinma tenglamasi

$$3x + 5y - 25 = 0.$$

Endi urinmaning umumiy formulasidan ya'ni kesuvchi chiziqning limit holatiga asoslangan usuldan foydalanib ellips uchun urinma tenglamasini topamiz.

Avval, ellips tenglamasini umumiy ko'rinishda yozamiz:

$$16x^2 + 25y^2 - 400 = 0.$$

Bu yerda

$$\begin{aligned} A &= 16, & B &= 0, & C &= 25, \\ D &= 0, & E &= 0, & F &= -400. \end{aligned}$$

Ikkinchi tartibli chiziqning $M(x_1, y_1)$ nuqtasidagi urinma tenglamasi

$$(Ax_1 + By_1 + D)x + (Bx_1 + Cy_1 + E)y + (Dx_1 + Ey_1 + F) = 0$$

formula bilan aniqlanadi.

Bu formulaga

$$x_1 = 3, \quad y_1 = \frac{16}{5}$$

qiymatlarni qo'yamiz:

$$(16 \cdot 3)x + \left(25 \cdot \frac{16}{5}\right)y - 400 = 0,$$

$$48x + 80y - 400 = 0.$$

Tenglamaning barcha hadlarini 16 ga bo'lsak:

$$3x + 5y - 25 = 0.$$

Demak,

$$3x + 5y - 25 = 0.$$

Natijalarni taqqoslaydigan bo'lsak, hosilaning geometrik ma'nosiga asoslangan usul ham, kesuvchi chiziqning limit holatiga asoslangan usul ham bir xil urinma tenglamasini berdi:

$$3x + 5y - 25 = 0.$$

Bu esa urinma tenglamasini topishning ko'rib chiqilgan usullari o'zaro ekvivalent ekanligini ko'rsatadi. Shu bilan birga, hosila usuli hisoblash nuqtai nazaridan sodda va qulay bo'lsa, umumiy formula usuli ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi uchun bevosita qo'llanish imkonini beradi.

Shunday qilib, kesuvchi-limit usuli urinma tushunchasining geometrik mazmunini chuqurroq yoritishga xizmat qilsa, hosila usuli urinma tenglamasini amaliy jihatdan tez va qulay topish imkonini beradi. Shu sababli nazariy tadqiqotlarda birinchi usul, amaliy hisoblashlarda esa ikkinchi usuldan foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Xulosa. Ushbu maqolada ikkinchi tartibli chiziq'larga urinma tenglamasini topishning geometrik va differensial usullari tahlil qilindi. Tadqiqot natijalari har ikkala usul bir xil natija berishini, ammo qo'llanish jihatidan farqlanishini ko'rsatdi. Geometrik usul urinma tushunchasining mohiyatini chuqurroq yoritib bersa, differensial usul hisoblashlarning soddaligi va amaliy qulayligi bilan ajralib turadi. Qiyosiy tahlil ushbu yondashuvlarning o'zaro bog'liqligini ko'rsatib, ularni kompleks qo'llash mavzuni chuqurroq o'zlashtirish va urinmaning xossalari to'liqroq anglashga xizmat qilishini tasdiqladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Xudayberganov G., Vorisov A.K., Mansurov X.T., Shoimqulov B.A. Matematik analizdan ma'ruzalar. I qism. – Toshkent: Voris-nashriyot, 2010. – 376 b.
2. Қори-Ниёзий Т.Н. Аналитик геометрия асосий курси. – Тошкент: Фан, 1971. – 502 б.
3. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1968. – 176 с.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Наука, 1969. – 608 с.
5. Супербиллер О.Н. Аналитик геометриядан масалалар ва машқлар. – Тошкент: Ўрта ва олий мактаб давлат нашриёти, 1960. – 316 б.