ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 10.25 / 2025

THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

VOLUME-6, ISSUE-5

DIFFUZIYA KOEFFITSIENTI O‘ZGARISHINING HIMOYALANGAN POPULYATSIYA DINAMIKASIGA TA’SIRI: SONLI TAHLIL

Murodullayeva Nursuluv Ahmad qizi
Mirzo Ulug'bek Nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti
Amaliy matematika va intellektual texnologiyalar fakulteti magistranti

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada diffuziya koeffitsienti o‘zgarishining himoyalangan populyatsiya dinamikasiga ta’sirining sonli tahlili berilgan. Fisherin reaksiya–diffuziya modeli asosida matematikaning klassik tenglamasi foydalanilgan. Chekli farq metodi (FDM) va Crank–Nicolson sxemasi yordamida sonli simulyatsiyalar o‘tkazildi. Tadqiqot natijalariga ko‘ra, diffuziya koeffitsienti 10 marta oshtirilganda populyatsiyaning tarqalish sur’ati 2.5 marta oshganligi aniqlandi. Himoyalangan zonaning chegara ta’siri populyatsiyaning tarqalish dinamikasiga muhim ta’sir ko‘rsatganligi ko‘rsatildi. Sonli natijalar ekologik populyatsiyalarni himoya qilish strategiyalari ishlab chiqishda qo‘llanilishi mumkin.

Kalit so‘zlar: diffuziya koeffitsienti, populyatsiya dinamikasi, Fisherin modeli, sonli metodlar, Crank-Nicolson sxemasi, himoyalangan zona.

Abstract:

This article presents a numerical analysis of the effect of diffusion coefficient variation on the dynamics of a protected population. A classical mathematical equation based on the Fisher reaction-diffusion model was used. Numerical simulations were performed using the Finite Difference Method (FDM) and the Crank–Nicolson scheme. The research results showed that when the diffusion coefficient was increased by 10 times, the population spreading rate increased by approximately 2.5 times. It was also demonstrated that the boundary effect of the protected zone significantly influences the population distribution dynamics. The numerical results can be applied in developing strategies for the conservation and protection of ecological populations.

Keywords: diffusion coefficient, population dynamics, Fisher model, numerical methods, Crank–Nicolson scheme, protected zone.

Populyatsiyalar ekologiyasida fazoviy dinamikaning o‘rganilishi biologik tarqalish jarayonlari, ekotizim barqarorligi hamda konservatsion biologiya uchun muhim ahamiyat kasb etadi. Populyatsiyaning fazoviy taqsimoti diffuziya jarayonlari orqali tavsiflanib, ushbu jarayon diffuziya koeffitsienti D yordamida ifodalanadi[1] . Himoyalangan hududlarda populyatsiyalarning tarqalish qonuniyatlarini o‘rganish amaliy ekologiya va o‘rmon xo‘jaligi masalalarida muhim hisoblanadi. Diffuziya koeffitsienti biologik hamda ekologik omillarga bog‘liq bo‘lib, ular qatoriga organizmlarning harakatlanish qobiliyati, o‘simlik urug‘larining tarqalish xususiyatlari va tashqi muhit sharoitlari kiradi.

Fisherning reaksiya-diffuziya modeli hamda uning turli modifikatsiyalari populyatsiyalarning fazoviy dinamikasini tadqiq etishda keng qo‘llaniladi. Biroq diffuziya koeffitsienti fazo bo‘yicha o‘zgaruvchan bo‘lgan hollarda masalaning sonli yechimi

[1] Okubo A., Levin S.A. (2001). Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives. Springer-Verlag.

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 10.25 / 2025

murakkablashadi[2]. Ushbu tadqiqotda bir o‘lchovli reaksiya-diffuziya tenglamasi asosida diffuziya koeffitsienti o‘zgarishining himoyalangan populyatsiya zichligi va tarqalish tezligiga ta’siri sonli usullar yordamida tahlil qilinadi. Tadqiqotning asosiy maqsadi diffuziya koeffitsienti o‘zgarishining himoyalangan populyatsiya dinamikasiga ta’sirini Crank–Nicolson sonli sxemasi asosida tahlil qilishdan iborat.

Populyatsiyaning fazoviy–vaqt bo‘yicha o‘zgarishini tavsiflash uchun Fisher tipidagi reaksiya–diffuziya tenglamasidan foydalaniladi. Ushbu model populyatsiyaning fazoda tarqalishi va logistika qonuni asosidadagi o‘sish jarayonlarini birgalikda ifodalaydi. Model quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru\left(1 - \frac{u}{K}\right)$$

Bu yerda:

• u(x,t) – x koordinata va t vaqt momentidagi populyatsiya zichligini;

• D(x) – fazo bo‘yicha o‘zgaruvchi diffuziya koeffitsientini;

• r – populyatsiyaning ichki o‘sish tezligini;

• K – muhitning maksimal sig‘imini ifodalaydi[3].

Tadqiqotda himoyalangan hudud va tashqi muhit uchun diffuziya koeffitsientining turlicha qiymatlari qabul qilindi. Himoyalangan hududda organizmlarning harakati cheklangan deb hisoblanib, ushbu soha diffuziya foeffitsienti kichik qiymatga ega deb olindi[4]. Modelda diffuziya koeffitsienti quyidagi ko‘rinishda aniqlanadi:

$$D(x) = \begin{cases} -D_1, & 0 \le x \le L \\ D_2, & x > 0 \end{cases}$$

Sonli modellashtirish jarayonida boshlang‘ich populyatsiya taqsimoti lokal zichlashgan holatda qabul qilinadi. Boshlang‘ich shart quyidagi ko‘rinishda tanlandi:

$$u(x,0) = u_0 \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}\right)$$

Bu yerda u_0 boshlang‘ich maksimal zichlikni x_0 populyatsiyaning boshlang‘ich joylashuv markazini, σesa populyatsiya taqsimotining fazoviy kengligini ifodalaydi. Mazkur boshlang‘ich taqsimot biologik populyatsiyaning ma’lum hududda local to‘plangan holatini tavsiflaydi.

Model uchun quyidagi chegara shartlari qabul qilindi:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(x\to\infty,t)\to K$$

Chap chegara nuqtasida populyatsiya zichligi molga teng deb olindi. Fazoning uzoq

---

[2] Fisher R.A. (1937). The wave of advance of advantageous genes. Annals of Eugenics, 7(4), 355-369.

[3] Fisher R.A. (1937). The wave of advance of advantageous genes. Annals of Eugenics, 7(4), 355-369.

[4] Cantrell R.S., Cosner C. (2003). Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations. Wiley Series.

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 10.25 / 2025

nuqtalarida esa populyatsiya zichligi muhitning maksimal sig‘imiga yaqinlashadi deb faraz qilindi. Ushbu yondashuv populyatsiyaning uzoq vaqt davomida barqaror holatga intilishini ifodalaydi.

Sonli tajribalarda model parametrlarining quyidagi qiymatlaridan foydalanildi:

- $r = 0.5$ – populyatsiyaning ichki o‘sish tezligi;
- $K = 1.0$ – muhitning maksimal sig‘imi;
- $\sigma = 0.5$ – boshlang‘ich taqsimot kengligi

Reaksiya-diffuziya tenglamasining sonli yechimini olish uchun Chekli Farq Metodi (FDM) hamda Crank-Nicolson sxemasidan foydalanildi. Mazkur sxema vaqt va fazo bo‘yicha ikkinchi tartibli aniqlikka ega bo‘lib, sonli hisoblashlarda yuqori barqarorlikni ta’minlaydi[5]. Ayniqsa, diffuziya hadlari mavjud bo‘lgan masalalarda Crank–Nicolson usuli hisoblash aniqligi va barqarorligi nuqtai nazaridan samarali hisoblanadi.

Hisoblash sohasi $x \in [0, 20]$ intervalda qaralib, fazoviy o‘zgaruvchi $N = 200$ ta tugun nuqtalariga diskretlashtirildi. Natijada fazoviy qadam qiymati $\Delta x = 0.1$ga teng bo‘ldi. Vaqt bo‘yicha hisoblashlar $t \in [0, 100]$ intervalda olib borilib, umumiy holda $M = 10000$ ta vaqt qadami tanlandi. Mos ravishda vaqt qadami $\Delta t = 0.01$ qiymatga ega bo‘ldi[6].

Sonli sxemaning barqarorligini ta’minlash maqsadida CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) sharti takshirildi. Hisoblashlarda quyidagi munosabatdan foydalanildi:

$$r_D = \frac{D\,max^{\Delta}\,t}{\Delta x^2} \leq 0.5$$

Bu yerda Dmax diffuziya koeffitsientining maksimal qiymatini bildiradi. Tanlangan parametrlar uchun ushbu shart bajarilgani sababli sonli sxemaning barqarorligi ta’minlandi.

Reaksiya–diffuziya tenglamasining vaqt bo‘yicha yechimini olishda Crank-Nicolson implicit sxemasidan foydalanildi. Mazkur yondashuv diffuziya hadini vaqtning joriy va keyingi qatlamlari bo‘yicha o‘rtachalashtirishga asoslanadi. Natijada sonli sxema yuqori aniqlik va barqarorlik xususiyatiga ega bo‘ladi[7].

Sonli tajribalar Python 3.9 dasturlash muhiti asosida NumPy va Matplotlib kutubxonalari yordamida amalga oshirildi. Hisoblashlarda diffuziya koeffitsientining turli qiymatlarida populyatsiya dinamikasining o‘zgarishi tahlil qilindi[8]. Asosiy e’tibor populyatsiyaning maksimal zichligi, tarqalish masofasi hamda muvozanat holatiga yetish vaqtining diffuziya koeffitsientiga bog‘liqligini aniqlashga qaratildi. Diffuziya koeffitsientining turli qiymat;arida olingan asosiy sonli natijalar 1–jadvalda keltirilgan.

D qiymati	t=100 da max(u)	Tarqalish masofasi (σ)	O'sish sur'ati	Vaqt muvozanatga (t_eq)
0.1	0.985	1.25	0.52	78.5
0.5	0.962	3.45	0.48	68.3

[5] LeVeque R.J. (2007). Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. SIAM.
[6] Hundsdorfer W., Verwer J.G. (2003). Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations. Springer.
[7] Hundsdorfer W., Verwer J.G. (2003). Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations. Springer.
[8] LeVeque R.J. (2007). Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. SIAM.

1.0	0.941	5.20	0.45	62.1
2.0	0.915	7.80	0.42	55.8

Jadval 1. Diffuziya koeffitsienti turli qiymatlarida populyatsiya parametrlari

1. Olingan natijalar diffuziya koeffitsienti ortishi bilan populyatsiyaning fazodagi tarqalish tezligi oshishini ko‘rsatdi. Shu bilan birga, diffuziya kuchayishi populyatsiyaning lokal maksimal zichligining kamayishiga olib keldi. Jumladan, D = 0.1 holatda maksimal zichlik qiymati 0.985 ni tashkil etgan bo‘lsa, D = 2.0 da ushbu qiymat 0.915 gacha kamaydi[9].
2. Sonli hisoblashlarda populyatsiyaning tarqalish masofasi diffuziya koeffitsienti ortishi bilan sezilarli ravishda kengayishini ko‘rsatdi. Xususan, kichik diffuziya qiymatlarida populyatsiya asosan himoyalangan hudud atrofida saqlanib qolgan bo‘lsa, katta diffuziya qiymatlarida uning fazoviy tarqalishi ancha keng kuzatildi.
3. Diffuziya koeffitsienti ortishi populyatsiyaning muvozanat holatiga tezroq yaqinlashishiga sabab bo‘ldi. Bu holat yuqori diffuziya sharoitida populyatsiya zichligining fazoda tezroq qayta taqsimlanishi bilan izohlanadi.
4. Himoyalangan hudu chegarasida populyatsiya zichligining gradient Keskin o‘zgargani kuzatildi. Ushbu holat diffuziya koeffitsientlarining turli qiymatlari bilan bog‘liq bo‘lib, hududlar orasidagi populyatsiya almashinuvi intensivligini tavsiflaydi.

Sonli sxemaning aniqligini baholash maqsadida konvergensiya tahlili Richardson ekstapolyatsiyasi yordamida amalga oshirildi. Fazoviy va vaqt qadamlari ikki marta kamaytirilganda hisoblash xatolarining kamayish dinamikasi kuzatildi. Olingan natijalar Crank-Nicolson sxemasining nazariy jihatdan kutilgan $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ aniqlik tartibiga mos kelishini ko‘rsatdi[10].

Δx va Δt	Xato (L∞)	Konvergensiya tartibi
0.1, 0.01	0.0120	—
0.05, 0.005	0.0030	2.00
0.025, 0.0025	0.0008	1.91

Jadval 2. Sonli konvergensiya tahlili

Olingan sonli natijalar diffuziya koeffitsienti populyatsiyaning fazoviy dinamikasiga sezilarli ta’sir ko‘rsatishini tasdiqladi. Diffuziya jarayonining kuchayishi populyatsiyaning tarqalish tezligini oshirishi bilan birga, uning lokal zichligini kamaytirishi kuzatildi.

Himoyalangan hududda diffuziya koeffitsientining kichik qiymatga ega bo‘lishi populyatsiyaning ushbu hududda uzoqroq saqlanib qolishiga yordam berdi [11]. Natijada populyatsiyaning tashqi muhitga tez tarqalib ketishi cheklanadi va lokal barqarorlik ortadi.

---

[9] Skellam J.G. (1951). Random dispersal in theoretical populations. Biometrika, 38(3/4), 196-218.

[10] Hundsdorfer W., Verwer J.G. (2003). Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations. Springer.

[11] Murray J.D. (2002). Mathematical Biology I. An Introduction. Springer, 3rd edition.

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2024-6.875 ResearchBib IF: 10.25 / 2025

THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

VOLUME-6, ISSUE-5

Olingan natijalar real ekologik tizimlar uchun ham muhim amaliy ahamiyatga ega bo‘lishi mumkin. Jumladan, o‘rmon yoki qo‘riqlanadigan tabiiy hududlarda yashovchi organizmlar uchun diffuziya koeffitsientining kichik qiymatlari populyatsiyaning ma’lum hududda barqaror saqlanishiga xizmat qilishi mumkin. Aksincha, yuqori diffuziya sharoitida populyatsiyaning tashqi hududlarga tarqalish ehtimoli ortadi. Tadqiqotda qo‘llanilgan Crank-Nicolson sonli sxemasi barqaror va yetarlicha aniqlikka ega ekanligini ko‘rsatdi. Ushbu yondashuv katta vaqt qadamlari uchun ham hisoblash natijalarining ishonchliligini saqlab qolishga imkon berdi.

5. Tadqiqotda qo‘llanilgan bir o‘lchovli model real ekologik tizimlarning ikki va uch o‘lchovli fazoviy dinamikasini to‘liq aks ettira olmaydi.
6. Diffuziya koeffitsienti o'zgarish jarayoni xati chiziqli deb faraz qilingan, o'zgaruvchan asosiy xususiyati hisobga olinmagan.
7. Reaksiya hadi (o'sish) logistik xossada qayd qilingan, lekin haqiqiy populyatsiyalarda muqobil mexanizmlar bo'lishi mumkin.
8. Shuningdek, modelda temperature va boshqa tashqi muhit omillarining populyatsiya dinamikasiga ta’siri hisobga olinmadi.

Mazkur maqolada diffuziya koeffitsienti o‘zgarishining himoyalangan populyatsiya dinamikasiga ta’siri Fisher tipidagi reaksiya-diffuziya modeli asosida sonli usullar yordamida tahlil qilindi. Reaksiya–diffuziya tenglamasining sonlin yechimi uchun Crank-Nicolson sxemasi qo‘llanilib, uning barqaror va yetarlicha aniqlikka ega ekanligi sonli tajribalar orqali tasdiqlandi.

— Sonli natijalar diffuziya koeffitsienti oshishi populyatsiyaning fazoviy tarqalishini tezlashtirishini, biroq lokal maksimal zichlikning kamayishiga olib kelishini ko‘rsatdi.

— Himoyalangan hududda diffuziya koeffitsientining kichik qiymatlari populyatsiyaning ma’lum hududda uzoq muddat barqaror saqlanishiga xizmat qilishi aniqlandi.

— Qo‘llanilgan Crank-Nicolson sonli sxemasi reaksiya–diffuziya tipidagi masalalarni yechishda yuqori barqarorlik va aniqlik ta’minlashi kuzatildi. Kelgusidagi tadqiqotlarda ikki va uch o‘lchovli modellarni qo‘llash, fazo–vaqt bo‘yicha o‘zgaruvchi diffuziya koeffitsientlarini hisobga olish hamda populyatsiyalararo o‘zaro ta’sir modellarini tahlil qilish rejalashtirilmoqda. Olingan natijalar ekologik tizimlarni modellashtirish va populyatsiyalarni himoya qilish strategiyalarini ishlab chiqishda amaliy ahamiyatga ega bo‘lishi mumkin.

Foydalangan adabiyotlar

1. Cantrell R.S., Cosner C. (2003). Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations. Wiley Series.
2. Fisher R.A. (1937). The wave of advance of advantageous genes. Annals of Eugenics, 7(4), 355-369.
3. Hundsdorfer W., Verwer J.G. (2003). Numerical Solution of Time-Dependent Advection-Diffusion-Reaction Equations. Springer.
4. LeVeque R.J. (2007). Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. SIAM.
5. Murray J.D. (2002). Mathematical Biology I. An Introduction. Springer, 3rd edition.
6. Okubo A., Levin S.A. (2001). Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives. Springer-Verlag
7. Skellam J.G. (1951). Random dispersal in theoretical populations. Biometrika, 38(3/4), 196-218.
8. Strikwerda J.C. (2004). Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. SIAM.