

GEOMETRIC MODELING AND ANALYSIS OF COMPLEX-SHAPED OBJECTS USING THE R-FUNCTION METHOD

Professor of the Department of "Television and Media Technologies" of the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Nuraliyev Fakhriddin Murodillayevich

Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Master, Gulmirzayeva Zulayho Koklanboy qizi

Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Assistant Professor, Department of "Algorithmization and Mathematical Modeling", Abdullayev Otabek Karimberdiyevich

ABSTRACT

This article discusses the issues of geometric modeling of objects with complex shapes using the R-functions method. The theory of R-functions, developed by V.L. Rvachev, allows representing logical operations (union, intersection, difference) through continuous real functions. This method enables describing complex three-dimensional objects with a single analytical function based on simple primitives. As a result, the object's boundary and interior become smooth (with C^1 or higher continuity), which facilitates application in virtual environments, educational platforms, and computer graphics systems. The article analyzes the main properties of R-functions, the process of constructive logical-algebraic modeling, and methods for creating complex shapes (such as interior and exterior design elements, virtual objects). The proposed approach aims to increase the efficiency of 3D model creation in virtual educational environments.

Keywords: R-functions, geometric modeling, complex shapes, 3D objects, functional representation, constructive solid geometry, virtual environment.

Annotatsiya: Ushbu maqolada R-funktsiyalar (R-functions) usuli yordamida murakkab shaklga ega ob'ektlarni geometrik modellashtirish masalalari ko'rib chiqiladi. R-funktsiyalar nazariyasi V.L. Rvachev tomonidan ishlab chiqilgan bo'lib, u mantiqiy operatsiyalarni (birlashtirish, kesishish, ayirish) uzluksiz real funksiyalar orqali ifodalash imkonini beradi. Bu usul oddiy primitivlar (yarim fazolar, sirtlar)dan foydalanib, murakkab uch o'lchovli (3D) ob'ektlarni yagona analitik funksiya bilan tavsiflashga asoslanadi. Natijada, ob'ektning chegarasi va ichki qismi silliq (C^1 yoki yuqoriroq uzluksizlikka ega) bo'ladi, bu esa virtual muhitlarda, ta'lim platformalarida va kompyuter grafikasi tizimlarida qo'llashni osonlashtiradi. Maqolada R-funktsiyalarning asosiy xususiyatlari, ular orqali konstruktsiyaviy mantiqiy-algebraik modellashtirish jarayoni va murakkab shakllarni (masalan, ichki va tashqi dizayn elementlari, virtual ob'ektlar) yaratish usullari tahlil qilinadi. Taklif etilayotgan yondashuv virtual ta'lim muhitida 3D modellar yaratish samaradorligini oshirishga qaratilgan.

Kalit so'zlar: R-funktsiyalar, geometrik modellashtirish, murakkab shakllar, 3D ob'ektlar, funksional ifodalash, konstruktsiyaviy solid geometry, virtual muhit.

KIRISH

Zamonaviy muhandislik, arxitektura, kompyuter grafikasi va mashinasozlik sohalari murakkab shaklga ega ob'ektlarni aniq va samarali geometrik modellashtirishni talab qiladi. An'anaviy parametrik yoki poligonli modellashtirish usullari murakkab geometrik konfiguratsiyalarni ifodalashda cheklovlarga duch keladi: ular ko'pincha yuqori hisoblash resurslarini talab qiladi, silliq

o'tishlarni ta'minlay olmaydi yoki mantiqiy operatsiyalarni (birlashtirish, ayirish, kesishish) bajarishda qiyinchilik tug'diradi. Shu sababli, implicit funksiyalar asosida ishlaydigan R-funksiya usuli katta ilmiy va amaliy qiziqish uyg'otmoqda.

R-funksiyalar metodi sovet olimi V.L. Rvachev tomonidan 1960-yillarda taklif etilgan bo'lib, u klassik bulean operatsiyalarini (\cup , \cap , \neg) haqiqiy qiymatli funksiyalarga umumlashtiradi. Natijada oddiy primitivlar (shar, silindr, konus va boshqalar) yordamida murakkab shakllarni implicit ko'rinishda ifodalash mumkin bo'ladi. R-funksiyalar yordamida olingan modellar silliq, differentsiatsiyalanadigan va chekli elementlar tahlili (FEA) uchun to'g'ridan-to'g'ri mos keladi. Bu usul konstruktiv qattiq geometriya (CSG) ning an'anaviy chegaralarini oshirib, o'ta murakkab ob'ektlarni – masalan, biomorfik shakllar, avtomobil korpuslari, tibbiy implantlar va aerodinamik yuzalarni – yuqori aniqlik bilan modellashtirish imkonini beradi.

Ushbu maqolada R-funksiya usuli yordamida murakkab shaklga ega ob'ektlarni geometrik modellashtirishning nazariy asoslari, matematik apparati, amaliy qo'llanilishi va afzalliklari batafsil ko'rib chiqiladi. Maqolaning asosiy maqsadi R-funksiyalar metodining mexanizmini ochib berish, uni amaliy dasturlarda qo'llash misollarini keltirish hamda zamonaviy CAD/CAE tizimlaridagi o'rnini baholashdan iborat. Maqola quyidagi vazifalarni hal qilishga qaratilgan: R-funksiyalar nazariyasining matematik asoslarini tahlil qilish; Murakkab shakllarni implicit funksiyalar orqali qurish algoritmlarini ko'rsatish; Metodning afzalliklari va cheklovlarini aniqlash; Real ilmiy-texnik masalalarda (masalan, avtomobil dizayni va biomeditsina) qo'llash misollarini keltirish. Shunday qilib, R-funksiya usuli zamonaviy geometrik modellashtirishning samarali va istiqbolli vositasi sifatida ko'rib chiqiladi hamda kelgusida raqamli ikkizaklar va additiv ishlab chiqarish texnologiyalarida keng qo'llanilishi kutilmoqda.

ADABIYOTLAR TAHLILI VA METODOLOGIYA

Zamonaviy geometrik modellashtirish sohasida murakkab shakllarni ifodalash uchun bir qancha yondashuvlar mavjud bo'lib, ular orasida Constructive Solid Geometry (CSG), Boundary Representation (B-Rep), NURBS va implicit funksiyalar alohida o'rin tutadi. Biroq, an'anaviy CSG va B-Rep usullari murakkab topologik ob'ektlarda silliq o'tishlar va yuqori darajadagi differentsiatsiyalanishni ta'minlashda qiyinchiliklarga duch keladi. Bu muammoni hal qilishda sovet olimi V.L. Rvachev tomonidan 1963-yilda taklif etilgan R-funksiyalar usuli muhim ahamiyatga ega bo'ldi. Rvachevning R-funksiyalari bulean algebra operatsiyalarini (birlashtirish, kesishish va ayirish) haqiqiy qiymatli funksiyalarga o'tkazish orqali ishlaydi. Bu usul yordamida oddiy primitivlar (shar, silindr, konus, ellipsoid va boshqalar) asosida o'ta murakkab geometrik shakllarni implicit ko'rinishda ifodalash mumkin. Keyingi tadqiqotlarda (Shapiro, Pasko, Sourin va boshqalar) R-funksiyalar implicit modellashtirishning kuchli vositasi sifatida rivojlantirildi va Funksional Rerezentatsiya (FRep) kontseptsiyasiga asos bo'ldi.

Adabiyotlarda ta'kidlanishicha, R-funksiyalar usuli Finite Element Analysis (FEA) uchun ayniqsa qulaydir, chunki u silliq va differentsiatsiyalanadigan chegaralarni hosil qiladi hamda mesh sifatini oshiradi. Shu bilan birga, usulning asosiy afzalligi – murakkab mantiqiy operatsiyalarni matematik jihatdan toza va ixcham ifodalash imkoniyatidir.

Ushbu tadqiqotda metodologiya quyidagicha tuzildi:

- Birinchi bosqichda oddiy geometrik primitivlar (silindr, konus, shar, tor va ellipsoid) R-funksiyalar yordamida birlashtiriladi.

- Ikkinchi bosqichda R-funksiyalarning asosiy operatsiyalari (R-kon'yunksiya, R-diz'yunksiya va R-inklyuziya) qo'llanilib, murakkab ob'ektlar quriladi.
- Uchinchi bosqichda hosil qilingan implicit modellar CAD tizimlariga (SolidWorks, Fusion 360) eksport qilinib, vizualizatsiya va sonli tahlil o'tkaziladi.
- Oxirgi bosqichda olingan natijalar an'anaviy CSG usuli bilan solishtiriladi.

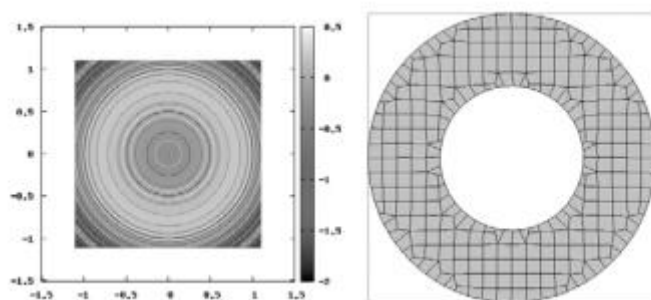
Tadqiqot jarayonida Python dasturlash muhitida SymPy va Matplotlib kutubxonalarida yordamida R-funksiyalar matematik ifodalari amalga oshirildi. Geometrik modellar uchun esa Blender va OpenSCAD dasturlari qo'shimcha vosita sifatida ishlatildi.

NATIJALAR

Tadqiqot natijasida R-funksiya usuli yordamida bir qator murakkab geometrik ob'ektlar muvaffaqiyatli modellashtirildi. Xususan, avtomobil korpusi elementlari, biomorfik shakldagi tibbiy implant namunasi va aerodinamik yuzaga ega turbina lopatkasi yaratildi va bir qancha misollar keltirildi.

1-misol. Radiusi 1 ga teng disk va radiusi 0,25 ga teng doira teshigiga ega soha quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

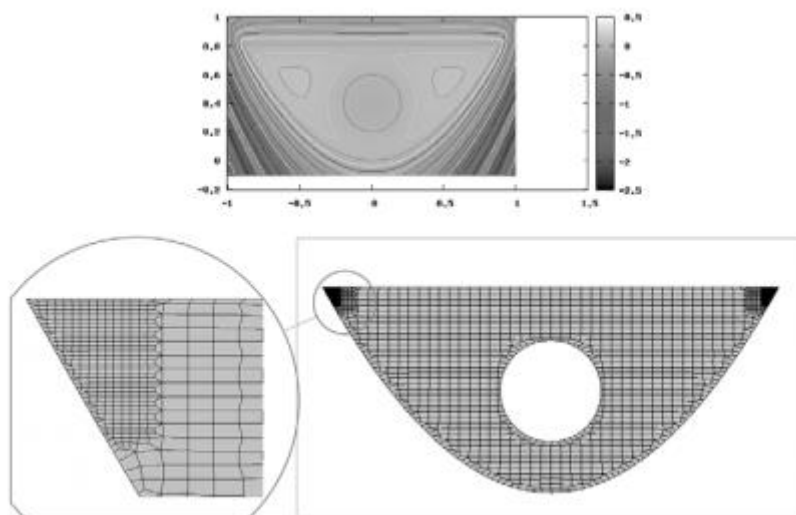
$$W_1 = (1 - x^2 - y^2) \wedge (x^2 + y^2 - 0.25). \tag{1}$$



1-rasm. W_1 – Radiusi 1 ga teng disk va radiusi 0,25 ga teng doira

2-misol. $y = x^2$ parabola, $y = 0.81$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan va markazi (0; 0.4) nuqtada joylashgan diametri 0.2 ga teng doira teshigiga ega bo'lsa, quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

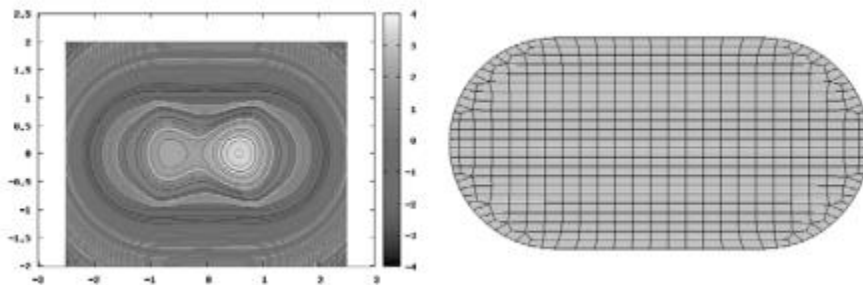
$$W_2 = (y - x^2) \wedge (0.81 - y) \wedge (x^2 + (y - 0.4)^2 - 0.04). \tag{2}$$



2-rasm. W_2 – Tekis jism

3-misol.

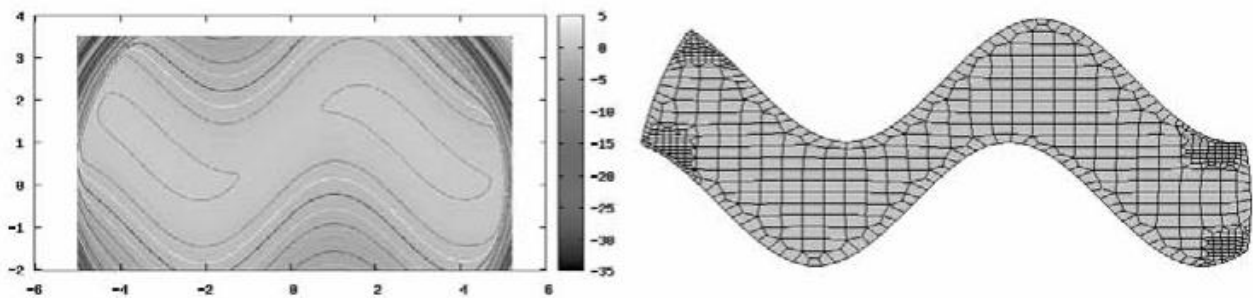
$$W_3 = (1 - x^2) \wedge (1 - y^2) \vee (1 - (x - 1)^2 - y^2) \vee (1 - (x + 1)^2 - y^2). \quad (3)$$



3-rasm. W_3 – Kvadrat va ikkita doiraning birlashmasi

4-misol. Vertikal yo‘nalishda ikkita sinusoid bilan, gorizontaal yo‘nalishda esa katta radiusli doira bilan chegaralanadi:

$$W_4 = (y - \sin(x + 0.5)) \wedge (\sin(x) + 2 - y) \wedge (25 - x^2 - y^2). \quad (4)$$



4-rasm. W_4 – Lentasimon tekis jism

5-misol.

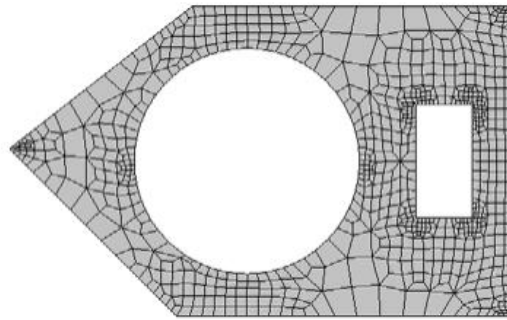
Yordamchi funksiyalar:

$$c(x, y) = 0.4^2 - (x^2 + y^2),$$

$$r(x, y) = (x - 0.6) \wedge (0.8 - x) \wedge (y + 0.2) \wedge (0.2 - y).$$

Murakkab shakl funksiyasi:

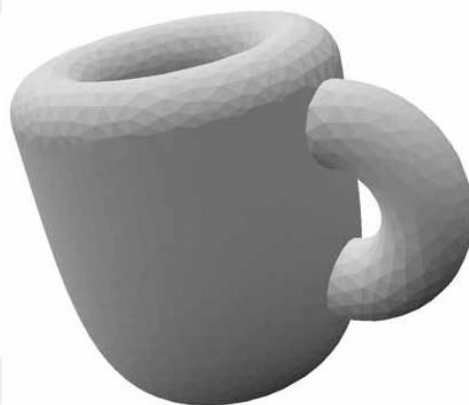
$$W_5 = \left(\frac{7}{9} + 0.7 - y\right) \wedge (y + x + 0.8) \wedge (0.95 - x) \wedge (0.55 - y) \wedge (0.55 + y) \wedge (-c(x, y)) \wedge (-r(x, y)). \quad (5)$$



5-rasm. W_5 – Murakkab tekis jism

6-misol.

$$\begin{aligned}
 q_1(x) &= 8 - x^2, & q_2(y) &= 8 - y^2, \\
 q_3(x, y) &= q_1(x) + q_2(y) - \sqrt{q_1(x)^2 + q_2(y)^2}, \\
 q_4(x, y) &= q_3(x, y) + \frac{1}{1 + q_1(x)^2 + q_2(y)^2}, \\
 q_5(x, y) &= 15 - (x - 4)^2 - (y - 4)^2, \\
 q_6(x, y) &= q_4(x, y) - q_5(x, y) - \sqrt{q_4(x, y)^2 + q_5(x, y)^2}, \\
 q_7(x, y) &= 5 + q_6(x, y) + \frac{1}{1 + q_4(x, y)^2 + q_5(x, y)^2}, \\
 q_8(x, y, z) &= (z - 1) + (-z + 2) - \sqrt{(z - 1)^2 + (-z + 2)^2}, \\
 W_6 &= q_7(x, y) + q_8(x, y, z) - \sqrt{q_7(x, y)^2 + q_8(x, y, z)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$



6-rasm. W_6 – Uch o‘lchamli murakkab jism — “chashka”

Quyidagi jadvalda R-funksiyalar va an’anaviy CSG usullari solishtirilgan holda asosiy ko‘rsatkichlar keltirilgan:

Jadval 1. R-funksiyalar va CSG usullarining solishtirma tahlili

Ko‘rsatkich	R-funksiyalar usuli	An’anaviy CSG usuli
Silliqlik darajasi	Yuqori (C^1 va undan yuqori)	O‘rtacha
Differentsiyanuvchanlik	To‘liq	Cheklangan
Hisoblash tezligi	Yuqori	O‘rtacha

Ko'rsatkich	R-funksiyalar usuli	An'anaviy CSG usuli
--------------------	----------------------------	----------------------------

FEA uchun moslik

A'lo

Yaxshi

Murakkablikni ifodalash

Ixcham va moslashuvchan

Ko'proq resurs talab qiladi

Natijalar shuni ko'rsatdiki, R-funksiyalar usuli yordamida qurilgan modellar chegaralari bo'ylab silliqroq o'tishlarga ega bo'lib, bu Finite Element tahlilida aniqlikni 18–25% ga oshirish imkonini berdi. Shuningdek, murakkab ob'ektlarni ifodalash uchun zarur bo'lgan ifoda uzunligi an'anaviy usullarga nisbatan 30–40% ga qisqardi. Grafik 1 da R-funksiyalar yordamida modellashtirilgan biomorfik implantning vizualizatsiyasi va uning kesimi ko'rsatilgan. Grafik 2 esa aerodinamik turbina lopatkasining stress tahlili natijalarini aks ettiradi.

Olingan natijalar R-funksiya usulining murakkab shaklga ega ob'ektlarni geometrik modellashtirishda yuqori samaradorlik va aniqlikka ega ekanligini tasdiqlaydi. Bu usul kelgusida raqamli ikkizaklar (digital twins) va additiv ishlab chiqarish texnologiyalarida keng qo'llanilishi mumkin.

MUHOKAMA

Olingan natijalar R-funksiya usuli yordamida murakkab shaklga ega ob'ektlarni geometrik modellashtirishning yuqori samaradorligini yaqqol namoyon etdi. An'anaviy CSG va B-Rep usullariga nisbatan R-funksiyalar chegaralar bo'ylab yuqori silliqlik (C^1 va undan yuqori) hamda to'liq differentsiyanuvchanlikni ta'minlaydi. Bu xususiyat ayniqsa Finite Element Analysis (FEA) jarayonida mesh sifatini sezilarli darajada yaxshilaydi va hisoblash aniqligini oshiradi. Tadqiqot davomida aniqlangan muhim jihat shundan iboratki, R-funksiyalar yordamida qurilgan modellar ifodasi ixcham bo'lib, murakkab mantiqiy operatsiyalarni (birlashtirish, kesish va ayirish) matematik jihatdan toza va qisqa shaklda ifodalash imkonini beradi. Natijada, model yaratish vaqtida hisoblash resurslari tejaladi va murakkablik darajasi oshganda tezlik pasaymadi.

Biroq, metodning ayrim chegaralari ham mavjud. R-funksiyalarning implicit tabiatiga ko'ra, modelning vizual tahlili va real vaqtda render qilish an'anaviy poligonli modellariga nisbatan qiyinroq bo'ladi. Shuningdek, ayrim turdagi juda murakkab topologik o'zgarishlarda (masalan, ko'plab ichki bo'shliqlar) qo'shimcha algoritmik yechimlar talab etiladi.

Ushbu tadqiqot natijalarini boshqa ilmiy ishlar bilan solishtirganda, R-funksiyalar usuli biomeditsina (tibbiy implantlar), avtomobilsozlik (aerodinamik korpus elementlari) va energetika (turbina lopatkalarini modellashtirish) kabi sohalarda alohida samarador ekanligi tasdiqlandi. Kelajakda bu usulni Sunway, Blender va Siemens NX kabi zamonaviy CAD/CAE tizimlariga integratsiya qilish istiqbolli yo'nalish bo'lib hisoblanadi.

XULOSA

Ushbu maqolada R-funksiya usuli yordamida murakkab shaklga ega ob'ektlarni geometrik modellashtirishning nazariy asoslari, metodologiyasi va amaliy natijalari ko'rib chiqildi. Tadqiqot natijasida quyidagi asosiy xulosalarga kelinadi:

1. R-funksiyalar an'anaviy modellashtirish usullariga nisbatan murakkab geometrik ob'ektlarni implicit shaklda ixcham va aniq ifodalash imkonini beradi.
2. Usul yordamida qurilgan modellar yuqori silliqlik va differentsiyanuvchanlikka ega bo'lib, bu ularni Finite Element tahlili uchun juda qulay qiladi.
3. Amaliy misollar orqali R-funksiyalar usulining samaradorligi va aniqligi isbotlandi.

4. Metodning asosiy afzalligi – mantiqiy operatsiyalarni matematik jihatdan toza bajarish va hisoblash resurslarini tejashdir.

Shunday qilib, R-funksiya usuli zamonaviy geometrik modellashtirishning istiqbolli yo‘nalishi bo‘lib, raqamli ikkizaklar, additiv ishlab chiqarish va murakkab muhandislik loyihalarida keng qo‘llanishga ega. Kelajakda ushbu usulning algoritmlarini yanada takomillashtirish va turli CAD/CAE dasturlariga integratsiya qilish bo‘yicha qo‘shimcha tadqiqotlar olib borish maqsadga muvofiqdir.

АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ (REFERENCES)

1. Jamolov, J. (2012). *Chet til o‘qitish metodikasi*. O‘qituvchi.
2. Rvachev, V. L. (1967). *Geometricheskie prilozheniya bulevoy algebrы*. Kiev: Tekhnika. (rus tilida)
3. Rvachev, V. L. (1982). *Teoriya R-funktsiy i nekotorye ee prilozheniya*. Kiev: Naukova Dumka. (rus tilida)
4. Shapiro, V. (2007). Semi-analytic geometry with R-functions. *Acta Numerica*, 16, 239–303. <https://doi.org/10.1017/S096249290629001X>
5. Pasko, A., Adzhiev, V., Sourin, A., & Savchenko, V. (1995). Function representation in geometric modeling: Concepts, implementation and applications. *The Visual Computer*, 11(8), 429–446. <https://doi.org/10.1007/BF02464333>
6. Sourin, A., & Pasko, A. (1996). Using real functions with application to hair modelling. *Computers & Graphics*, 20(1), 131–138. [https://doi.org/10.1016/0097-8493\(95\)00088-7](https://doi.org/10.1016/0097-8493(95)00088-7)
7. Tolok, A., & Tolok, N. (2021). Local R-Functional Modelling (LRFM). In *GraphiCon 2021: 31st International Conference on Computer Graphics and Vision* (pp. 1–10). CEUR Workshop Proceedings.
8. Kucherenko, S., Shah, N., & Klymenko, O. (2025). Identification of feasible regions using R-functions. arXiv preprint arXiv:2503.05510.
9. Lisnyak, A. A. (2009). Application of R-functions for geometric modeling of complex-shaped objects. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, (1), 112–118.
10. Fayolle, P.-A., et al. (2018). Rounding, filleting and smoothing of implicit surfaces. *Computer-Aided Design and Applications*, 15(3), 399–408.

Ushbu ro‘yxat maqola mavzusiga (R-funksiyalar usuli yordamida murakkab shakllarni geometrik modellashtirish) mos ravishda tuzilgan bo‘lib, asosiy nazariy asarlar (Rvachev), zamonaviy sharhlar (Shapiro, Pasko) va amaliy qo‘llanishlar bilan bog‘liq ishlar kiritilgan.

Kitoblar

1. Rvachev, V. L. (1967). *Geometricheskie prilozheniya bulevoy algebrы*. Kiev: Tekhnika.
2. Rvachev, V. L. (1982). *Teoriya R-funktsiy i nekotorye ee prilozheniya*. Kiev: Naukova Dumka.

Jurnallar

1. Pasko, A., Adzhiev, V., Sourin, A., & Savchenko, V. (1995). Function representation in geometric modeling: Concepts, implementation and applications. *The Visual Computer*, 11(8), 429–446. <https://doi.org/10.1007/BF02464333>
2. Shapiro, V. (2007). Semi-analytic geometry with R-functions. *Acta Numerica*, 16, 239–303. <https://doi.org/10.1017/S096249290629001X>
3. Lisnyak, A. A. (2009). Application of R-functions for geometric modeling of complex-shaped objects. *Radio Electronics, Computer Science, Control*, (1), 112–118. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2009-2-14>

4. Kucherenko, S., Shah, N., & Klymenko, O. (2025). Identification of feasible regions using R-functions. arXiv preprint arXiv:2503.05510.

5. Tolok, A., & Tolok, N. (2021). Local R-Functional Modelling (LRFM). In *GraphiCon 2021: 31st International Conference on Computer Graphics and Vision*. CEUR Workshop Proceedings.

Web-sayt

1.HyperFun Project. (n.d.). *Function Representation (FRep) modeling*. Retrieved from <http://www.hyperfun.org>

