

“International school of finance technology and science” instituti o‘qituvchisi

Temirov Azizbek Sunnat ug‘li

azizbektmirov0428@gmail.com

Annotatsiya

So‘nggi yillarda differensial geometriya fani rivojlanib, uning amaliy va nazariy yo‘nalishlariga qiziqish ortib bormoqda. Ayniqsa, sirtlar va ularning xossalarini o‘rganish, shu jumladan sirt o‘ramalari geometriyasini tadqiq etish, fizika, muhandislik, kompyuter grafikasi kabi fanlar bilan bevosita bog‘liqligi tufayli dolzarb masalalardan biriga aylandi. Sirt o‘ramalari sirtlarning shakli va holatini tavsiflash, ularni fazoda ifodalash va tahlil qilishda muhim vosita hisoblanadi. Ushbu soha nafaqat nazariy jihatdan, balki amaliyotda ham keng qo‘llaniladi. Bu esa mavzuning ilmiy va amaliy ahamiyatini yanada oshiradi. Ushbu maqolaning asosiy maqsadi – sirt o‘ramasi tushunchasini chuqur o‘rganish, ularning differensial-geometrik xossalarini tahlil qilish hamda ayrim turdagi sirt o‘ramalari uchun egrilik, normal vektor va boshqa muhim elementlar bilan bog‘liq formulalarni chiqarishdan iborat. Tadqiqot obyekti sifatida fazodagi silliq sirtlar va ularning o‘ramalari bilan bog‘liq differensial-geometrik obyektlar olinadi.

Maqolada sirt o‘ramalarining ayrim maxsus turlari uchun differensial-geometrik xossalar o‘rganilgan. Ularning asosiy va ikkilamchi shakllari, egrilik komponentlari va ularning o‘zaro bog‘liqligi aniqlangan. Shuningdek, sirt o‘ramalarining konkret misollar asosida tahlili berilgan va yangi natijalar keltirilgan.

Kalit so‘zlar

Sirtlar oilasi, sirt o‘ramasi, differensial geometriya, bir parametrlil sirtlar oilasi, ikki parametrlil sirtlar oilasi, diskriminant sirt, qaytish qirrasini, kanal sirt, egiluvchi sirt, Gauss egriligi, o‘rta egrilik, asosiy va ikkilamchi shakllar, urinma tekislik, normal vektor, xarakteristik chiziqlar.

Kirish

So‘nggi yillarda mamlakatimizda fan va texnikaning turli sohalarida fundamental va amaliy tadqiqotlarga bo‘lgan e‘tibor ortib bormoqda. Ayniqsa, tabiiy va aniq fanlarning rivojlanishiga qaratilgan izchil islohotlar, ilmiy salohiyatni yuksaltirish hamda zamonaviy muammolarni hal etishga xizmat qiladigan yangi nazariy yondashuvlarni shakllantirishni talab qilmoqda. Bu jarayonda geometriya va uning zamonaviy bo‘limlaridan biri hisoblangan differensial geometriya alohida ahamiyat kasb etadi. Differensial geometriyada sirtlar va ularning xossalarini chuqur o‘rganish orqali fizikadagi, mexanikadagi hamda muhandislik fanlaridagi ko‘plab amaliy muammolarni hal qilish mumkin. Xususan, sirt o‘ramalari geometriyasi – klassik va zamonaviy geometriya tutashgan muhim yo‘nalishlardan biri bo‘lib, turli fazoviy strukturalarning lokal va global xossalarini aniqlashda muhim o‘rin tutadi. Sirtlar geometriyasining dastlabki rivojlanishi Gaspar Monj, Sharl D‘yupen va boshqa matematiklarning ishlari bilan bog‘liq. XIX asrda K.F. Gauss va B. Riman tomonidan sirtlarning ichki geometriyasini o‘rganishga asos solindi. Ayniqsa, Gaussning "Theorema Egregium" deb nomlanuvchi mashhur teoremasi sirtning egrilik xossasining faqat uning ichki metrikasi bilan aniqlanishini ko‘rsatdi. XX asrda esa bu yondashuvlar yanada chuqurlashib, silliq sirtlarning topologiyasi, o‘ramalari va deformatsiyalari kabi masalalar bilan boyidi.

Sirt o‘ramalari geometriyasi sirtlarning qanday qilib fazoda joylashganini, ularning fazoviy egri chiziqlar bilan qanday o‘ralganligini, qanday geometrik xossalarga ega bo‘lishini o‘rganadi. Bu yo‘nalish, ayniqsa, fizikada (masalan, to‘lqinlar tarqalishi, qattiq jismlar deformatsiyasi, elastiklik nazariyasi), biologiyada (hujayra membranalari geometriyasi) va zamonaviy texnologiyalarda (kompyuter grafikasi, 3D modellashtirish) keng qo‘llanilmoqda.

Mazkur tadqiqotning obyekti – Evklid fazosida berilgan silliq sirtlar va ularning fazodagi o‘ramalari hisoblanadi.

Tadqiqot predmeti – chiziqlar va sirt o‘ramalari orqali aniqlanadigan differensial-geometrik invariantlar, o‘rama chiziqlari, asosiy shakllar, shuningdek, ular o‘rtasidagi bog‘lanishlar.

Tadqiqotning asosiy maqsadi – chiziqlar va sirtlarning fazodagi o‘ramalari orqali ularning geometriyasini tavsiflovchi asosiy elementlar va ularning o‘zaro munosabatlarini o‘rganishdir.

Tadqiqot vazifalari quyidagilardan iborat:

- Sirt o‘ramalari tushunchasi va unga bog‘liq bo‘lgan asosiy differensial invariantlarni aniqlash;
- Birinchi va ikkinchi kvadratik formalar orqali o‘rama xossalarini ifodalash;
- O‘rama chiziqlarning holatini aniqlovchi tenglamalarni hosil qilish;
- Sirt egirliklarining o‘rama bilan bog‘liqligini tahlil qilish.

Maqolada sirt o‘ramalari doirasida ayrim yangi sinfdagi sirtlar uchun o‘rama invariantlarining xossalari o‘rganildi. Shuningdek, ba‘zi holatlarda o‘rama chiziqlarining maxsus turlari (masalan, assimptotik chiziqlar, geodezik chiziqlar) bilan bog‘liq yangi natijalar keltirildi.

Asosiy masala – sirtlar o‘ramalarining xossalarini aniqlab, ularning fazoviy strukturasi tavsiflashdir. Faraz sifatida, o‘rama invariantlar asosida sirtning lokal va global geometrik xossalarini aniqlash imkoniyati mavjud, deb qaraladi.

Metod

Bir parametrlil regulyar sirtlar oilasi berilgan bo‘lsin:

$$F(x, y, z, \alpha) = 0 \quad (1)$$

bu yerda $F(x, y, z, \alpha) = 0$ funksiya $W(x, y, z)$ sohada regulyar funksiya bo‘lib, shu sohada uchinchi tartibgacha hosilalarga ega deb faraz qilamiz.

Ta‘rif 1. Bir parametrlil (1) sirtlar oilasining o‘ramasi deb, shunday sirtga aytamizki, u o‘zining har bir nuqtasida shu oilaning ayni bir sirtiga urinib turadi[1]. Urinish nuqtasi o‘rama va oilaning sirti uchun oddiy nuqta deb faraz qilinadi.

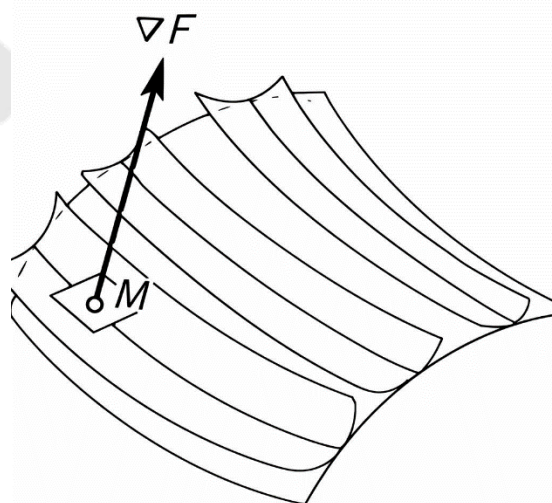
Ta‘rifga ko‘ra, o‘rama sirtning har bir nuqtasiga oilaning bitta sirti mos keladi: o‘rama bo‘ylab harakat qilinsa, oilaning yangi-yangi sirtlari vujudga keladi, boshqacha aytganda, α parametr o‘zgarib boradi, demak, bu parametr o‘ramadagi $M(x, y, z)$ nuqtaning biror funksiyasidir:

$$\alpha = \alpha(x, y, z)$$

O‘rama sirt mavjud deb faraz qilamiz va uni aniqlash usulini beramiz. Oilaning tenglamasiga $\alpha(x, y, z)$ ni qo‘ysak, ayniyat hosil qilinadi:

$$F(x, y, z, \alpha(x, y, z)) = 0.$$

Buni α bo‘yicha differensiallaymiz:



VOLUME-6, ISSUE-1

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \quad (2)$$

yoki

$$\overline{\nabla F} dr + \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \quad (3)$$

Oilaning har bir sirti uchun α o'zgarimasdir, shu sababli (1) ni differensiallasak

$$\overline{\nabla F} dr = 0 \quad (4)$$

bo'ladi. Biroq izlanayotgan sirtning umumiy M nuqtasi oddiy bo'lgani uchun $\overline{\nabla F} \neq 0$ Endi, shartga ko'ra, shu nuqtada ham oila sirti uchun, ham o'rama uchun ∇F umumiy bo'ladi (ular umumiy urinma tekisligiga ega), demak (2) dan $\frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha = 0$ Ammo o'rama sirt bo'ylab harakat qilinganda $d\alpha \neq 0$, chunki o'ramaning nuqtasidan nuqtasiga o'tganda α parametr o'zgarib boradi, shu sababli $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$. Xulosa, oilaning o'ramasi mavjud bo'lsa, uning nuqtalari ikkita tenglamani qanoatlantiradi:

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \frac{\partial F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0. \quad (5)$$

Bu ikkita tenglamadan α yo'qotilsa, o'ramaning koordinatali shakldagi tenglamasi hosil bo'ladi:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \quad (6)$$

O'ramaning mavjudligi uchun (5) shartlar faqat zaruriy bo'lgandir, (6) tenglama, umumiy aytganda, o'ramadan boshqa sirtlarni ham ifodalashi mumkin. Shu sababli uni mustaqil ravishda ko'rib chiqilganda, u oilaning diskriminant sirti deyiladi (211-chizma). Bu sirtning tenglamasini (6) shaklda yozdik. Bu sirt bo'ylab siljiganida to'rtta x, y, z, α o'zgaruvchilari ikkita tenglama bilan bog'lanadi. Shu sababli bu tenglamalardan to'rtta o'zgaruvchini ikkita mustaqil parametrlarning funksiyalari shaklida ifodalasak, diskriminant sirtning parametrik tenglamalari kelib chiqadi.

Teorema 1. [1] Qaytish qirrasining nuqtalari quyidagi uchta tenglamani qanoatlantiradi:

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, \frac{\partial F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial^2 F(x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (7)$$

Isbot. Haqiqatan ham, qaytish qirrasining har bir nuqtasi tayin xarakteristikaga tegishlidir, shu sababli $r = r(t)$ ni [yoki $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ ni] (5) ga qo'yganida ikkita ayniyat hosil bo'ladi. Ularning ikkinchisini t bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} = 0 \quad (8)$$

Qaytish qirrasining $\frac{dr}{dt}$ urinmasi $F = 0$ va $F_\alpha = 0$ sirtlarning urinma tenglamasida yotadi, demak, u $F_\alpha = 0$ sirtning

$$\overline{\nabla F}_\alpha \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial x}, \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial z} \right\}$$

Gradient vektoriga perpendikulyar:

$$\overline{\nabla F}_\alpha \frac{dr}{dt} = \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} = 0$$

ekanini e'tiborga olsak, (8) dan $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = 0$ hosil bo'ladi. Shuni isbotlash kerak edi.

Qaytish qirrasining tenglamalarini hosil qilish uchun (7) tenglamalardan α ni yo'qotib, $\Phi_1(x, y, z) = 0$ va $\Phi_2(x, y, z) = 0$ ni topamiz yoki x, y, z ni α orqali ifodalaymiz:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), r = r(t),$$

Chiziqlar nazariyasidagi singari, sirtlar oilasiga tegishli bir-biriga yaqin ikkita α va $\alpha + \Delta\alpha$ sirt bir-biri bilan kesishsa va $\Delta\alpha \rightarrow 0$ da kesishish chizig'ining limiti mavjud bo'lsa, u holda bu limit chiziq egri chiziq xarakteristikasidan iborat bo'ladi.

Biz bir parametrli sirtlar oilasining o'ramasi haqida so'z yuritdik. Agar sirtlarning ikkita parametrli oilasi

$$F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

berilib, uning o'ramasi mavjud bo'lsa, u uchta tenglamani qanoatlantiradi:

$$F = 0, \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0$$

Biroq ikkita parametrli oila umumiy holda o'ramaga ega emas.

Markazlari $\bar{p} = \bar{p}(s)$ chiziqda yotgan va radiuslari o'zgarmas bo'lgan sferalar oilasining o'ramasini topaylik. Sferaning tenglamasi quyidagidir:

$$[r - \bar{p}(s)]^2 - a^2 = 0 \quad (a = \text{const}).$$

Buni s parametr bo'yicha differensiallasak, u holda xarakteristika

$$[r - \bar{p}(s)]^2 = a^2, [r - \bar{p}(s)]\bar{\tau} = 0 \quad (9)$$

tenglamalardan va qaytish qirrasini esa

$$(r - p)^2 = a^2, (r - p)\bar{\tau} = 0, (r - p)k\bar{\tau} - 1 = 0 \quad (10)$$

tenglamalardan aniqlanadi. (9) dan ko'rinadiki, oila xarakteristikalari: sferalarning "markazlar chizig'i" (C) dagi normal tekisliklar bilan kesishish chiziqlaridan (ya'ni katta doiralardan) iboratdir. O'rama sirt shu doiralardan iborat bo'lib, u *kanal sirt* deyiladi.

(10) dagi uchinchi tekislik (C) ning bosh normaliga tik bo'lib, $p(s)$ nuqtasidan k masofada turadi va (10) dagi injiniy tekislik bilan (C) ning egrilik o'qi bo'ylab kesishadi. Oila qaytish qirrasini esa (C) ning egrilik o'qi bilan sharlarning kesishish nuqtalaridan tuzilgan va (C) ga "*parallel*" bo'lgan nuqtalar chizig'idan iborat. Qaytish qirrasining tenglamasini (10) dan foydalanib topamiz:

$$r = \bar{p} + \frac{\bar{\tau}}{k} \pm \sqrt{a^2 - \frac{1}{k^2}\bar{\beta}}$$

Teorema 2. [2] Egiluvchi har qanday sirt (tor)ni tekisliklarning bir parametrli oilasining o'ramasi deb qarash mumkin.

Isbot. Haqiqatan ham, torning yasovchilari bir parametrli oilani tashkil qiladi. Har bir yasovchiga yagona urinma tekislik o'tadi, demak, torning barcha urinma tekisliklari ham bir parametrli oilani tashkil qiladi va tor bu oila uchun o'rama vazifasini bajaradi.

Bu teoremani oldingi mulohazalar bilan birgalikda ko'rib chiqsak, quyidagi muhim natija kelib chiqadi:

Sirtning egiluvchi (tor) bo'lishi uchun u bir parametrli tekisliklar oilasining o'ramasi bo'lishi zarur va yetarli.

Endi yana umumiy holga o'tib, oilaning qaytish (R) qirrasini aniqlaymiz. Uning radius-vektori quyidagi uchta tenglamani qanoatlantirishi kerak:

$$rn(a) + D(\alpha) = 0, rn'(a) + D'(\alpha) = 0, rn''(a) + D''(\alpha) = 0 \quad (13)$$

Bu tenglamalar $r(x, y, z)$ ga nisbatan chizikli sistema bo'lib, uning determinant quyidagiga teng:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Ikki holni ko'rib chiqamiz:

1) $\Delta = nn'n'' \neq 0$. Bu holda (13) sistemani r ga nisbatan bir qiymatli ravishda echib, r ni α orqali ifodalaymiz:

$$\Delta = r = r(\alpha) = \{x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)\}. \quad (14)$$

Agar $r(a)$ - uzgaruvchi vektor bo'lsa, (14) tenglama egri chiziqni - R qaytish qirrasini ifodalaydi. Uning yopishma tekisliklari qaralayotgan oilaning tekisliklaridan iborat bo'ldi. Haqiqatan, xarakteristika (13) ning birinchi va ikkinchi tenglamalari bilan berilgan tekisliklarda yotadi, demak, uning r' urnimi shu tekisliklarning normalari bo'lgan n va n' vektorlarga tengdir:

$$r'n = 0, r'n' = 0$$

Bu tengliklarning birinchisini α bo'yicha differensiallab, ikkinchisiga asosan, ushbu natijani hosil qilamiz:

$$r''n = 0$$

Shunday qilib, $n \perp r''$ demak, oila tekisligi R ta urnib, r'' ni o'z ichiga oladi. Qurilgan hol umumiy bo'lib, torsining tuzilishi haqida to'la tasavvur beradi.

Biz $r = const = r_0$ ni tashlab ketdik. Bu holda qaytish kirrasi nuqtaga aylanib, barcha xarakteristikalar bitta nuqtadan o'tadi. Oilaning tekisliklarining o'ramasi konik sirt bo'ldi.

Xulosa

Maqolada sirtlar geometriyasining asosiy tushunchalari va ularning o'ramalarga tayyorlash bosqichidagi roli tahlil qilindi. Sirtning birinchi va ikkinchi asosiy shakllari, ularning o'zaro bog'liqligi, shuningdek, asosiy geometriya invariantlari — Gauss egriligi va o'rta egrilik tushunchalari batafsil yoritildi. Bu invariantlar orqali sirtlarning mahalliy geometriyasi aniqlanishi va tasniflanishi ko'rsatildi. Keyin esa sirtlarning klassifikatsiyasi va o'ramalar uchun muhim bo'lgan maxsus sirtlar — minimal sirtlar, tekis sirtlar, developlanuvchi sirtlar kabi holatlar o'rganildi.

Turli tipdagi sirt o'ramalari – silindrik, konus va torus tipidagi o'ramalar misolida sirtlar geometriyasiga oid asosiy invariantlar (egrilik, burilish va boshqalar) hisoblab chiqildi hamda ularning o'ziga xos xossalari chuqur tahlil qilindi.

Adabiyotlar

1. Narmanov A.Y. Differensial geometriya va topologiya. Toshkent, 2024.
2. Narmanov A.Y, Sharipov A.S, Aslonov J.O. Differensial geometriya va topologiya fanidan masalalar to'plami. Toshkent, "Университет", 2014.
3. Залгаллер В.А. "Теория огибающих", М.1975.
4. Sobirov M.A. va Yusupov A.E. "Differensial geometriya kursi", "O'qituvchi" nashriyoti 1965.
5. Погорелов А.В. "Дифференциальная геометрия", Москва 1974.
6. Болтянский В.Г. "Огибающая", М., 1961.
7. <https://www.lex.uz/> (O'zbekiston Respublikasi Qonun hujjatlari ma'lumotlari milliy bazasi)