ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2023-5.384 ResearchBib IF: 8.848 / 2023

THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

VOLUME-3, ISSUE-6

ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ ЛЮБОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ.

Xoliqova Manzura Qoyirovna-Assistent ,

Abdumannobov Azizjon Akbar o'g'li -23/133 guruh talabasi Raqamli iqtsodiyot (tarmoq soxalar bo'yicha)yo'nalishi

Ташкентский государственный аграрный университет.

тел.:+998934758834, manzuraxoliqova37@gmail.com

Аннотация. Рассматривается точные и усеченные разностные схемы m-го ранга. Доказывается, что при непрерывности по Гельдеру матричных коэффициентов и правой части исходной краевой задачи усеченные схемы m-го ранга имеют точность O($h^{m+\mu}$) в специальной весовой норме.

Ключевые слова. Разностная схема, усеченная разностная схема, точная схема, шаблон, сетка, пространство, аналог, точность.

Введение. Приближенное решения краевых задач с особенностью разностным методом вызывает ряд трудностей по сравнению с решением таких задач без особенности. Решением краевых задач с разностными методами занимались такие знаменитые ученые как А.А. Самарский , А. Н. Тихонов , С. К. Годунов , Н.Н. Яненко , А. В. Гулин, В. Б. Андреев, П.И. Монастырный, В. Г. Приказчиков , В. Л. Макаров и другие.

Среди разностных схем особое место занимает так называемые точные схемы , впервые разработанные А.А. Самарским и А. Н. Тихоновым. (см, [3]).

При построении обычных разностных схем путем замены дифференциалов разностными выражениями от искомого решения задачи потребуется более высокая гладкость, чем которая требуется для существования и единственности решения исходной дифференциальной задачи.

Методика построения точных трехточечных разностных схем такова , что она существует и единственна при тех же требованиях , при которых существует и единственна решение исходной дифференциальной задачи. Кроме этого точные разностные схемы сохраняют все "хорошие" качества (консервативность, самосопряженность) исходной дифференциальной задачи.

Краевые задачи с особенностью часто возникают при решении задач фильтрации в неоднородных средах (см, [6]) и задач теории оболочек переменной толщины.

Теория точных разностных схем дальнейшее свое развитие получила в работах представителей математической школы, возглавляемой профессором В. Л. Макаровым в Киевском государственном университете им. Т. Г. Шевченко.

Численное решение краевых задач с вырождением вызывает значительные трудности связанные с понижением скорости сходимости приближенного решения к точному по сравнению с регулярным случаем (см например [5]).

Постановка задачи. В связи с этим актуальной задачей является разработка численных методов высокого порядка точности для указанного класса задач, позволяющих получать удовлетворительные решения на достаточно грубых сетках. Этому требованию удовлетворяют точные и усеченные разностные схемы которые были построены и исследованы в работе [2] для самосопряженной краевой задачи с вырождением в случае

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889,
2023-5.384 ResearchBib IF: 8.848 / 2023
THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
VOLUME-3, ISSUE-6

векторной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

В настоящем сообщении результаты работы [2] переносятся на несамосопряженный случай .

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$L^{(P,Q)}\vec{u} \equiv ((1-x^2)P(x)\vec{u}\,')'-Q(x)\vec{u}=-\vec{f}(x), \qquad -1<x<1 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\|\vec{u}(\pm 1)\|<\infty \qquad \textbf{(2)}$$

где $P(x)=[p_{ij}(x)]$, $Q(x)=[q_{ij}(x)]$ $(i,j=\overline{1,n})$ квадратные, вещественные матрицы размерности nxn, $\vec{f}(x)$- заданная а $\vec{u}(x)$- искомая n-мерные вектор – функции .

Будем предполагать что матрицы P(x), Q(x) и вектор $\vec{f}(x)$ удовлетворяют следующим условиям A:

1) $C_1E\leq P(x)\leq C_2E$, $C_3E\leq Q(x)\leq C_4E$,

где $P(x)\geq CE \Leftrightarrow (P(x)\vec{y},\vec{y})\geq C(\vec{y},\vec{y})$, $\forall\ \vec{y}\in E^n$, $x\in[-1,1]$

$(\bullet,\bullet)$- скалярное произведение в E^n, E-единичная матрица в E^n .

2) Матрицы P(x), Q(x) являюся непрерывными по Гельдеру, т.е.

$\|P(x)-P(y)\|\leq C|x-y|^{\mu}$, $\|Q(x)-Q(y)\|\leq C|x-y|^{\mu}$,

$x,y \in [-1,1]$, $\|\bullet\|$-произвольная матричная норма в E^n , $0<\mu\leq 1$.

3) $f_i(x) \in W_2^{-1}[-1;1]$, $i=\overline{1,n}$

где $\vec{f}(x)=(f_1(x)\ \ f_2(x), \dots ,f_n(x))^T$.

Пусть V [-1;1] – гильбертово пространство (см, [2]) вектор-функций со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v})_{V[-1,+1]}=\int_{-1}^{1}\left((1-x^2)\left((\vec{u}\,',\vec{v}\,')\right)+(\vec{u},\vec{v})\right)dx$$

Используя известные результаты по разрешимости краевых задач (см, например, [4]) , нетрудно показать, что выполнение условий A гарантирует существование и единственность решения задачи (1), (2) в пространстве V[-1;1]

Метод решения. Пусть $\omega_h=\{x_i=x_0+ih,\ x_0=-1\ ,\ x_n=1,\ i=(1,\ n),\ h=2/n\ \}$ равномерная сетка на отрезке [-1;1]

Введем шаблонные матричные функции $V_1^i(x)$, $V_2^i(x)$, которые являются решениями следующих матричных задач Коши :

$(V_j^{i\prime}(x)(1-x^2)P(x))'-V_j^i(x)Q(x)=\Theta$; j=1,2 , $x_{i-1}<x<x_{i+1}$

$V_1^i(x_{i-1})=\delta_{i,1}E$, $V_2^i(x_{i+1})=\delta_{i,N-1}E$, $i=\overline{1,N-1}$

$V_1^{i\prime}(x)(1-x^2)P(x)\,\big|_{x_{i-1}}=(1-\delta_{i,1})E$,

$V_2^{i\prime}(x)(1-x^2)P(x)\,\big|_{x_{i+1}}=(\delta_{i,N-1}-1)E$,

где Θ-нуль-матрица в простратстве E_n;

$\delta_{i,1}$- символ Кронекера.

Теорема 1 . Пусть выполнены условия A , тогда точная трехточечная разностная схема для задачи (1), (2) существует , единственна и имеет вид:

$$(A\overrightarrow{u_{\bar{x}}})_{x,i}-D_i\vec{u}_i+\frac{1}{h}(A_i-B_i)\overrightarrow{u_{\overset{\circ}{x},i}}=-\vec{F}_i,\ i:=\overline{1,N-1} \qquad \textbf{(3)}$$

$\|\vec{u}_0\|<\infty$; $\|\vec{u}_N\|<\infty$

где $A_{i+1}=[h^{-1}V_2^i(x_i)]^{-1}$, $B_i=[h^{-1}V_1^i(x_i)]^{-1}$, $B_1=A_N=\Theta$, $D_i=T_i(Q)$, $\vec{F}_i=T_i(\vec{f})$

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2023-5.384 ResearchBib IF: 8.848 / 2023
THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
VOLUME-3, ISSUE-6

$$T_i(W)=h^{-1}([V_1^i(x_i)]^{-1}\int_{x-1}^{x_i}V_1^i(y)W(y)dy+[V_2^i(x_i)]^{-1}\int_{x}^{x_{i+1}}V_2^i(y)W(y)dy)$$

Существование ТТРС доказано ранее, причем конструктивно а единственность ТТРС (6) доказывается как в самосопряженном случае (см, [3])

Следуя методике работ [2,6], проведем построение усеченных разностных схем (УРС) m-го ранга . Введем в отрезке $[x_{i-1},x_{i+1}]$ локальную систему координат по формуле $x=x_i+sh$

Положим по определению

$$V_1^i(x)=\begin{cases}\alpha^1(s,h) \text{ при } i=1,\\ h\,\alpha^i(s,h) \text{ при } \mathrm{i}=\overline{2,N-1}.\end{cases}$$

$$V_2^i(x)=\begin{cases}h\,\beta^i(s,h) \text{ при } i=\overline{1,N-2},\\ \beta^{N-1}(s,h) \text{ при } \mathrm{i}=N-1.\end{cases}$$

Подставляя эти выражений в матричные задачи Коши получим соответствующие задачи для α^i(s,h), β^i(s,h), решения которых будем искать в виде (см, [6])

$$\alpha^i(s,h)=\sum_{k=0}^{\infty}h^{2k}\alpha_k^i(s), \quad \beta^i(s,h)=\sum_{k=0}^{\infty}h^{2k}\beta_k^i(s) \qquad \textbf{(4)}$$

Здесь матрицы $\alpha_k^i(s)$, $\beta_k^i(s)$ определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_{k+1}^i(s)=\int_{-1}^{s}\int_{-1}^{\xi}\alpha_k^i(\eta)\tilde{Q}(\eta)\tilde{P}_1^{-1}(\xi)d\eta d\xi,\ \alpha_0^i(s)\equiv E,$$

$$\alpha_0^i(s)=\int_{-1}^{S}\tilde{P}_1^{-1}(\eta)d\eta;\ \mathrm{i}=\overline{2,N-1}, \qquad \textbf{(5)}$$

$$\beta_{k+1}^i(s)=\int_s^1\int_\xi^1\beta_k^i(\eta)\tilde{Q}(\eta)\tilde{P}_1^{-1}(\xi)d\eta d\xi,\ \beta_0^{N-1}(s)\equiv E,$$

$$\beta_0^i(s)=\int_S^1\tilde{P}_1^{-1}(\eta)d\eta;\ \mathrm{i}=\overline{1,N-2},\ k=1,2,\dots$$

где

$$\widetilde{W}(s)=W(x_i+sh),\ \tilde{P}_1(\xi)=(1-(x_i+\xi h)^2)\tilde{P}(s)$$

Можно доказать , что условие (3) гарантирует равномерную сходимость рядов (4) к решению задач Коши для α^i(s,h) и β^i(s,h) . В терминах матриц α^i(s,h) , β^i(s,h) ТТРС (5) запишем в виде

$$(A\vec{u}_{\bar{x}})_{x,i}-D_i\vec{u}_i+\frac{1}{h}(A_i-B_i)\vec{u}_{\bar{x},i}=-\vec{\Phi}_i,\ i=\overline{1,N-1}$$

$$\|\vec{u}_0\|<\infty,\quad \|\vec{u}_N\|<\infty \qquad \textbf{(6)}$$

где $B_1=A_N=\Theta$, $A_{i+1}=[\beta^i(0,h)]^{-1}$, $B_i=[\alpha^i(0,h)]^{-1}$

$D_i=T^i(Q)$, $\vec{\Phi}_i=T^i(\vec{f})$,

$$T^i(W)=[\alpha^i(0,h)]^{-1}\int_{-1}^{0}\alpha^i(\xi,h)\widetilde{W}(\xi)d\xi+[\beta^i(0,h)]^{-1}\int_0^1\beta^i(\xi,h)\widetilde{W}(\xi)d\xi.$$

Если в суммах (3) ограничимся m-слагаемыми т.е. вместо α^i(s,h) , β^i(s,h) возьмем матричные полиномы 2m-й степени по h:

$$\alpha^m(s,h)=\sum_{k=0}^{m}h^{2k}\alpha_k^i(s), \quad \beta^m(s,h)=\sum_{k=0}^{m}h^{2k}\beta_k^i(s)$$

и подставляя их в ТТРС (6) вместо α^i(s,h) , β^i(s,h) то получим разностную схему вида

$$(A^m\vec{y}_{\bar{x}})_{x,i}-D_i\vec{y}_i+\frac{1}{h}(A_i^m-B_i^m)\vec{y}_{\bar{x},i}=-\vec{\Phi}_i^m,\ i=\overline{1,N-1}$$

$$\|\vec{y}_0\|<\infty,\quad \|y_N\|<\infty \qquad \textbf{(7)}$$

где $B_1^m=A_N^m=\Theta$, $A_{i+1}^m=[\beta^m(0,h)]^{-1}$, $B_i^m=[\alpha^m(0,h)]^{-1}$

$D_i^m=T_i^m(Q)$, $\vec{\Phi}_i^m=T_i^m(\vec{f})$,

$$T_i^m(W)=[\alpha^m(0,h)]^{-1}\int_{-1}^{0}\alpha^m(s,h)\widetilde{W}(s)ds+[\beta^m(0,h)]^{-1}\int_0^1\beta^m(s,h)\widetilde{W}(s)ds,$$

которая по определению (см,[3]) является УРС m-го ранга.

ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261,SJIF 2022-2.889, 2023-5.384 ResearchBib IF: 8.848 / 2023
THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
VOLUME-3, ISSUE-6

Справедлива следующая.

С помощью метода энергетических неравенств [3] приходим к доказательству основной теоремы.

Теорема 2. Пусть выполнены условия А , тогда при достаточно малом значении h усеченная разностная схема m-го ранга (4) для задачи (1), (2) имеет m+μ – й порядок точности , т. е. справедлива оценка

$$\|\vec{z}\|_{V_h} \leq Ch^{m+\mu}\|\vec{u}\|_{V_h},\ C\neq C(h)$$

Где $\|\bullet\|_{V_h}$-сеточный аналог нормы в пространсве V[-1;1] ,

$\vec{z}=\vec{v}-\vec{u}$ погрешность усеченной разностной схемы m-го ранга (4).

Литература .

1. Авдеев А. Д. О матричных дифференциальных уравнениях второго порядка. Дифференциальные уравнения , 1977 г. , т 13 №4.с 579-591

2. Лужных В. М., Макаров И. Л., Хамроев Ю.Ю. Точные и усеченные разностные схемы для краевых задач в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений с вырождением Вычислительная и прикладная математика., Киев 1983 г . №51. С3-13.

3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., Наука 1977 г. 656 с.

4. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., Мир. 1980г. 227с.

5. Эльшнер В. О. О разностном методе для вырождающихся обыкновенных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения. 1979г. 15, №5. С 828-839 .

6. Мухидинов Н. Методы расчёта показателей разработки многопластовых месторождений нефти и газа. Ташкент , “Фан”1978 г, 117 с.