

**Хасанов Б.Б.**

*ст. преп. кафедры «Тех.маш.» Алмалыкского филиала ТГТУ им. И. Каримова*

Для определения величины потенциальной энергии деформации, накапливающейся в балке при изгибе, воспользуемся формулой удельной потенциальной энергии:

$$u = (1/2 E)[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_1 \cdot \sigma_3 + \sigma_2 \cdot \sigma_3)]$$

При изгибе в каждой точке балки возникает двухосное (плоское) напряженное состояние с напряжениями  $\sigma_1 = \sigma_{max}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{min}$  и  $\sigma_2 = 0$  следовательно,

$$u = (1/2 E)(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \mu \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_3) \quad (1)$$

Выразим главные напряжения  $\sigma_1 = \sigma_{max}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{min}$  через напряжения и площадках, совпадающих с поперечным сечением балки

$$u = (1/2 E) \cdot \{2 \cdot (\frac{\sigma}{2})^2 + 2 \cdot [(\frac{\sigma}{2})^2 + \tau^2] - 2 \cdot \mu \cdot [(\frac{\sigma}{2})^2 - (\frac{\sigma}{2})^2 - \tau^2]\}$$

Преобразуем это выражение

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} + (\frac{\tau^2}{2}) \cdot 2 \cdot (\frac{1+\mu}{E})$$

Учитывая, что

$$2 \cdot (\frac{1+\mu}{E}) = 1/G$$

Получаем

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G} \quad (2)$$

Формула (2) дает выражение удельной потенциальной энергии при прямом поперечном изгибе.

Подставим в выражение (2) значения  $\sigma$  и  $\tau$  по формулам:

$$u = [M^2 / (2EJ^2)] \cdot y^2 + Q^2 S^2 / (2GJ^2 b^2) \quad (3)$$

Потенциальная энергия, накапливающаяся в элементарном объеме

$dV = dF \cdot dx$  балки, потенциальная энергия на участке балки длиной  $dx$  (т.е. в объеме  $F dx$ ) определяется выражением

$$dU = dx \int_F u dF$$

Подставим в него значение  $u$  по формуле (3):

$$dU = dx \int_F (\frac{M^2}{2EJ^2} y^2 + \frac{Q^2 S^2}{2GJ^2 b^2}) dF = dx (\frac{M^2}{2EJ^2} \int_F y^2 dF + \frac{Q^2}{2GJ^2} \int_F \frac{S^2}{b^2} dF).$$

Учитывая, что  $\int_F y^2 dF = J$ , и обозначая

$$\frac{F}{j^2} \int_F \frac{S^2}{b^2} dF = \eta \quad (4)$$

получаем

$$dU = \frac{M^2}{2EJ} dx + \frac{Q^2}{2GF} dx$$

THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

VOLUME-5, ISSUE-6

откуда полная потенциальная энергия деформации изгиба, накапливающаяся в балке на участке длиной,

$$U = \int_l \frac{M^2}{2EJ} dx + \int_l \frac{Q^2}{2GF} dx \quad (5)$$

Для балки постоянного сечения

$$U = \frac{1}{2EJ} \int_l M^2 dx + \frac{\eta}{2GF} \int_l Q^2 dx \quad (6)$$

В случае, когда балка имеет несколько участков, различающихся законами изменения жесткостей поперечных сил, потенциальную энергию деформации следует определять по формуле

$$U = \sum \int_{l_i} \frac{M^2}{2EJ} dx + \sum \int_{l_i} \eta \cdot \frac{Q^2}{2GF} dx, \quad (7)$$

где  $i$  - порядковый номер участка балки.

В формулах (5) — (7)  $\eta$  — безразмерный коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения балки.

Определим коэффициент для прямоугольного сечения, показанного на рис.1. Для этого сечения площадь  $F=bh$ ; момент инерции  $J=(bh^3)/12$ ; площадь элементарной площадки  $dF=bdy$ ; статический момент части сечения, расположенной выше площадки  $dF$ , относительно оси  $z$

$$S = b(h/2 - y) \frac{h/2 + y}{2} = (b/2) (h^2/4 - y^2)$$

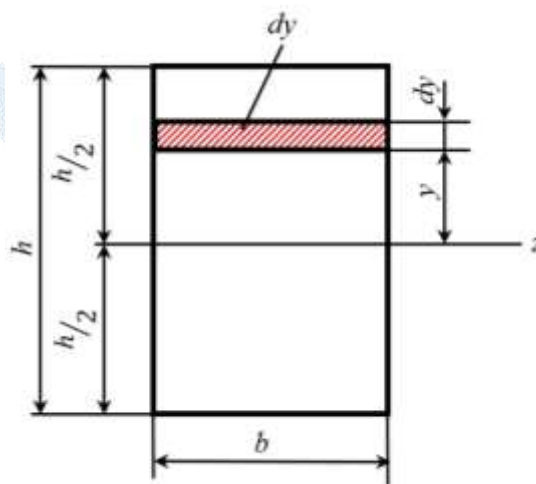


Рис.1

Следовательно, по формуле (4)

$$\eta = \frac{bh}{(bh^3/12)^2} \int_{-h/2}^{+h/2} [ \frac{b}{2} ( \frac{h^2}{4} - y^2 ) ]^2 \frac{bdy}{b^2} = \frac{b^4 h \cdot 144}{b^4 h^6 \cdot 4} \int_{-h/2}^{+h/2} ( \frac{h^2}{4} - y^2 )^2 dy = \frac{36}{h^5} ( \frac{h^4 y}{16} - \frac{h^2 y^3}{6} + \frac{y^5}{5} ) \Big|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{36 \cdot h^5}{h^5} \cdot 2 ( \frac{1}{16 \cdot 2} - \frac{1}{6 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} ) = 1,2.$$

Для круглого сечения  $\eta = \frac{10}{9}$ . Для балки двутаврового сечения коэффициент можно приближенно определить по формуле

$$\eta \approx F / F_{ст}$$

где  $F$  — полная площадь поперечного сечения,  $F_{ст}$  — площадь сечения стенки двутавра.

## THE MULTIDISCIPLINARY JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

### VOLUME-5, ISSUE-6

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Э.Ф. Винокуров. А.Г. Петрович. Л.И. Шевчук. Сопротивлению материалов расчетно-проектировочные работы. Минск “Вышэйшая школа”. 1987. -227стр.
2. Н.М. Атаров, Ю.Д. Насонкин “Примеры решения задач по сопротивлению материалов”. Учебное пособие. Москва 1990. -136 стр.
3. Khasanov B. B. “Determination of the Angular Velocity of the Driving Link at the Moment of Driving Forces”. Spanish Journal of Innovation and Integrity. ISSN: 2792-8268 Volume: 33, Aug-2024. <http://sjii.indexedresearch.org>
4. Хасанов Б.Б. “РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ”. ISSN: 2582-4686 SJIF 2021-3.261, SJIF 2022-2.889, 2023-5.384 ResearchBib IF: 8.848 / 2024. Multidisciplinary journal of science and technology, VOLUME-4, ISSUE-12. 4(12), 292–295. <https://doi.org/10.5281/zenodo.14501838>
5. B.B. Xasanov., “BURALISH DEFORMATSIYASI”. TECHNICAL SCIENCE RESEARCH IN UZBEKISTAN, 1(5), 547–551. Retrieved from. ISSN (E): 2992-9148 ResearchBib Impact Factor: 9.576 / 2023. VOLUME-1, ISSUE-5 <https://doi.org/10.5281/zenodo.10448458>
6. Khudjaev M. Shakov V. Khasanov B. “Modeling fluid outflow from a channel consisting of a cylindrical section of a constant radius, and an expanding outlet section”. WEB OF SCIENTIST: INTERNATIONAL SCIENTIFIC RESEARCH JOURNAL ISSN: 2776-0979, Volume 3, Issue 4, April., 2022. <https://wos.academiascience.org>
7. Khasanov B. B. (2025). “TORSION OF RODS. В INTERNATIONAL BULLETIN OF ENGINEERING AND TECHNOLOGY” (Т. 5, Выпуск 5, сс. 222–224). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15601456>
8. Khudjaev M. K. Khasanov B. B. “STATICS OF A TRIANGULAR WEDGE”. International Journal of Mechatronics and Applied Mechanics 2025, Issue 20, Vol. 1. 202–207. <https://ijomam.com/issue-20/>