VOLUME-4, ISSUE-6

DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN SPEKTRAL APPROKSIMATSIYA USULLARINING NAZARIY ASOSLARI.

Termiz iqtisodiyot va serviz institute magistranti
To'rayeva Mahbuba Niyozovna

Annotatsiya. Mazkur maqolada differensial tenglamalarni yechishda qoʻllaniladigan spektral approksimatsiya usullarining nazariy asoslari oʻrganilgan. Chebishev va Furye bazis funksiyalarining xossalari tahlil qilinib, spektral metodlarning yaqinlashish tezligi hamda aniqlik koʻrsatkichlari yoritilgan.

Kalit soʻzlar: spektral metod, approksimatsiya, differensial tenglama, Chebishev koʻphadlari, Furye qatori, ortogonallik, yaqinlashish, sonli modellashtirish.

Аннотация. В статье рассматриваются теоретические основы спектральных методов аппроксимации, применяемых при решении дифференциальных уравнений. Исследуются свойства базисных функций Чебышёва и Фурье, анализируются точность и скорость сходимости спектральных методов.

Ключевые слова: спектральный метод, аппроксимация, дифференциальное уравнение, многочлены Чебышёва, ряд Фурье, ортогональность, сходимость, численное моделирование.

Abstract. This paper examines the theoretical foundations of spectral approximation methods used for solving differential equations. The properties of Chebyshev and Fourier basis functions are analyzed, and the accuracy and convergence characteristics of spectral techniques are discussed.

Keywords: spectral method, approximation, differential equation, Chebyshev polynomials, Fourier series, orthogonality, convergence, numerical modeling.

Kirish. Hozirgi kunda fan va texnikaning turli sohalarida uchraydigan murakkab jarayonlarni tadqiq etishda differensial tenglamalar muhim matematik vosita hisoblanadi. Fizika, mexanika, gidrodinamika, issiqlik oʻtkazuvchanligi, biologiya, iqtisodiyot va boshqa koʻplab yoʻnalishlarda yuz beradigan jarayonlar oddiy hamda xususiy hosilali differensial tenglamalar yordamida tavsiflanadi. Biroq amaliy masalalarning aksariyatida ushbu tenglamalarning analitik yechimini topish qiyin yoki umuman imkonsiz boʻlganligi sababli sonli usullardan foydalanishga ehtiyoj tugʻiladi. Differensial tenglamalarni sonli yechish uchun chekli ayirmali, chekli elementli, variatsion va spektral metodlar keng qoʻllaniladi. Ushbu metodlar orasida spektral approksimatsiya usullari yuqori aniqligi va tez yaqinlashishi bilan alohida ajralib turadi. Spektral metodlarning asosiy gʻoyasi izlanayotgan funksiyani maʼlum ortogonal bazis funksiyalar tizimi orqali ifodalashga asoslanadi. Natijada differensial tenglama yechimi chekli sondagi koeffitsiyentlar yordamida approksimatsiyalanadi va masala algebraik yoki oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltiriladi.

Spektral approksimatsiya usullarining nazariy asosi ortogonal koʻphadlar va trigonometrik funksiyalar nazariyasiga tayangan holda shakllangan. Ayniqsa, Chebishev koʻphadlari va Furye qatorlari spektral metodlarning eng koʻp qoʻllaniladigan bazis funksiyalari hisoblanadi. Ularning ortogonallik xossasi, rekurrent formulalari hamda yaqinlashish xususiyatlari differensial tenglamalarni yuqori aniqlik bilan yechish imkonini beradi. Silliq funksiyalar uchun spektral metodlarning xatoligi bazis funksiyalar soni ortishi bilan juda tez kamayadi, bu esa ularning boshqa sonli usullarga nisbatan ustunligini taʼminlaydi.

So‘nggi yillarda spektral metodlar ilmiy hisoblashlar, matematik modellashtirish va kompyuter simulyatsiyalarida keng qo‘llanilmoqda. Ayniqsa, murakkab chegaraviy masalalar, evolyutsion tenglamalar va nochiziqli jarayonlarni modellashtirishda ushbu metodlarning samaradorligi ko‘plab tadqiqotlarda tasdiqlangan. Shu sababli spektral approksimatsiya usullarining nazariy asoslarini o‘rganish, ularning matematik apparatini tahlil qilish hamda differensial tenglamalarni yechishdagi imkoniyatlarini tadqiq etish dolzarb ilmiy masalalardan biri hisoblanadi.

Mazkur maqolada differensial tenglamalar uchun spektral approksimatsiya usullarining nazariy asoslari ko‘rib chiqiladi. Xususan, ortogonal bazis funksiyalar, Chebishev ko‘phadlari va Furye qatorlarining asosiy xossalari yoritiladi, spektral approksimatsiyaning matematik mohiyati tahlil qilinadi hamda metodlarning yaqinlashish va aniqlik xususiyatlari tadqiq etiladi. Tadqiqotning asosiy maqsadi differensial tenglamalarni sonli yechishda spektral approksimatsiya usullarining nazariy afzalliklarini ochib berish va ularning amaliy qo‘llanish imkoniyatlarini ko‘rsatishdan iborat.

Asosiy qism. **Spektral approksimatsiya usullarining matematik mohiyati. Differensial tenglamalarni sonli yechish jarayonida asosiy masalalardan biri izlanayotgan funksiyani ma’lum bir bazis funksiyalar tizimi yordamida yaqinlashtirishdan iborat. Spektral approksimatsiya usullarida yechim ortogonal funksiyalar orqali ifodalanadi va natijada differensial tenglama algebraik yoki oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Ushbu yondashuvning asosiy afzalligi shundaki, bazis funksiyalar soni ortishi bilan taqribiy yechimning aniq yechimga yaqinlashishi juda yuqori tezlikda amalga oshadi.**
Spektral metodlarda izlanayotgan funksiya quyidagi ko‘rinishda approksimatsiyalanadi:
[
u(x)\approx \sum_{k=0}^{N} a_k \varphi_k(x),
]
bu yerda (\varphi_k(x)) — ortogonal bazis funksiyalar, (a_k) esa aniqlanishi lozim bo‘lgan spektral koeffitsiyentlardir.

Agar bazis funksiyalar sifatida trigonometrik funksiyalar tanlansa, Furye spektral metodi hosil bo‘ladi. Chebishev yoki Lejandr ko‘phadlari tanlanganda esa ko‘phadli spektral metodlar vujudga keladi.

Chebishev ko‘phadlari va ularning xossalari

Spektral approksimatsiya usullarida eng ko‘p qo‘llaniladigan ortogonal ko‘phadlardan biri Chebishev ko‘phadlaridir. Birinchi tur Chebishev ko‘phadlari quyidagicha aniqlanadi:
T_n(x)=\cos(n\arccos x),\quad x\in[-1,1]
Chebishev ko‘phadlari bir qator muhim xossalarga ega:
ortogonallik xossasi;
rekurrent munosabatlarning mavjudligi;
minimaks xossasi;
yuqori aniqlikdagi approksimatsiyani ta’minlashi.
Ularning rekurrent formulasi quyidagicha yoziladi:
T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)
Mazkur xossa hisoblash algoritmlarini soddalashtirish va kompyuter dasturlarini samarali tashkil etish imkonini beradi.

Furye qatorlari asosidagi spektral approksimatsiya

Periodik funksiyalarni approksimatsiyalashda Furye qatorlari muhim ahamiyatga ega. Bunday hollarda yechim trigonometrik funksiyalar orqali ifodalanadi:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

Furye qatorlari yordamida silliq funksiyalar juda yuqori aniqlik bilan tasvirlanadi. Shu sababli ular to‘lqinli jarayonlar, akustika, elektromagnit maydonlar va boshqa periodik jarayonlarni modellashtirishda keng qo‘llaniladi.

Spektral metodlarning yaqinlashish xossalari

Spektral approksimatsiya usullarining asosiy ustunligi ularning yuqori tezlikda yaqinlashishidir. Agar izlanayotgan funksiya yetarli darajada silliq bo‘lsa, approksimatsiya xatoligi bazis funksiyalar soni ortishi bilan eksponensial ravishda kamayadi.

Chekli ayirmali metodlarda xatolik odatda to‘r qadami darajasiga bog‘liq bo‘lsa, spektral metodlarda xatolikning kamayish tezligi ancha yuqori bo‘ladi. Shu sababli bir xil aniqlikka erishish uchun spektral metodlarda kamroq hisoblash nuqtalari talab etiladi.

Spektral metodlarning yaqinlashishi ortogonal bazis funksiyalarning xossalari bilan chambarchas bog‘liq bo‘lib, bu holat ularning nazariy jihatdan puxta asoslanganligini ko‘rsatadi.

Differensial tenglamalarni yechishda spektral approksimatsiya

Differensial tenglamalarni yechishda spektral metodning mohiyati differensial operatorlarni matritsaviy operatorlar bilan almashtirishdan iborat. Natijada dastlabki differensial masala algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi.

Spektral metodlar:
oddiy differensial tenglamalar;
xususiy hosilali differensial tenglamalar;
evolyutsion tenglamalar;
chegaraviy masalalar;
nochiziqli matematik modellar
uchun muvaffaqiyatli qo‘llaniladi.

Ayniqsa, Byurgers tenglamasi, Navye–Stoks tenglamalari, issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamalari va to‘lqin tenglamalarini sonli modellashtirishda spektral approksimatsiya usullarining samaradorligi ko‘plab ilmiy tadqiqotlarda tasdiqlangan.

Spektral approksimatsiya usullarining afzalliklari

Spektral metodlarning amaliy afzalliklari quyidagilardan iborat:
yuqori aniqlik;
eksponensial yaqinlashish tezligi;
hisoblash xarajatlarining nisbatan kamligi;
murakkab differensial tenglamalarni yechish imkoniyati;
zamonaviy kompyuter texnologiyalari bilan samarali integratsiyalashuvi.

Ushbu afzalliklar spektral approksimatsiya usullarini zamonaviy hisoblash matematikasining eng istiqbolli yo‘nalishlaridan biriga aylantirgan. Shu bois ular ilmiy tadqiqotlar, muhandislik hisoblari va matematik modellashtirish masalalarida keng qo‘llanilmoqda.

Xulosa. **Mazkur maqolada differensial tenglamalarni sonli yechishda qo‘llaniladigan spektral approksimatsiya usullarining nazariy asoslari tahlil qilindi. Tadqiqot davomida spektral metodlarning matematik mohiyati, ortogonal bazis funksiyalarga asoslangan approksimatsiya jarayoni hamda differensial tenglamalarni yechishdagi o‘rni yoritildi. Shuningdek, spektral metodlarning nazariy poydevorini tashkil etuvchi Chebishev ko‘phadlari va Furye qatorlarining asosiy xossalari ko‘rib chiqildi.**

Tahlillar shuni ko‘rsatdiki, ortogonallik xossasiga ega bo‘lgan bazis funksiyalardan foydalanish yechimlarni yuqori aniqlik bilan approksimatsiyalash imkonini beradi. Ayniqsa, Chebishev ko‘phadlarining rekurrent formulalari va minimaks xossasi hisoblash jarayonlarini soddalashtirib, sonli algoritmlarning samaradorligini oshiradi. Furye qatorlari esa periodik funksiyalarni ifodalashda va ularga mos differensial masalalarni yechishda muhim ahamiyat kasb etadi.

Spektral approksimatsiya usullarining asosiy afzalligi ularning yuqori tezlikda yaqinlashish xususiyatiga egaligidadir. Silliq funksiyalar uchun bazis funksiyalar sonining ortishi bilan approksimatsiya xatoligi eksponensial ravishda kamayadi. Bu esa spektral metodlarning ko‘plab hollarda chekli ayirmali va boshqa an’anaviy sonli usullarga nisbatan yuqori aniqlikni ta’minlashini ko‘rsatadi.

Tadqiqot natijalari spektral approksimatsiya usullari differensial tenglamalarni sonli yechishda nazariy jihatdan asoslangan, amaliy jihatdan esa samarali vosita ekanligini tasdiqladi. Mazkur metodlar oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar, chegaraviy masalalar hamda evolyutsion jarayonlarni modellashtirishda muvaffaqiyatli qo‘llanilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. Boyd J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. – 2nd ed. – New York: Dover Publications, 2001. – 688 p.
2. Trefethen L.N. *Spectral Methods in MATLAB*. – Philadelphia: SIAM, 2000. – 165 p.
3. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*. – Berlin: Springer-Verlag, 2006. – 563 p.
4. Shen J., Tang T., Wang L.L. *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*. – Heidelberg: Springer, 2011. – 470 p.
5. Gottlieb D., Orszag S.A. *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. – Philadelphia: SIAM, 1977. – 172 p.
6. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. *Numerical Mathematics*. – New York: Springer, 2007. – 655 p.